

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**В.В. Меншуткин**

**ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
АППАРАТА КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ  
И НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ  
В ЭКОЛОГО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЯХ**

Нестор-История  
Санкт-Петербург  
2017

УДК 504.4  
ББК 20.1  
М 50

**Меншуткин, Владимир Васильевич**

**М 50** Применение математического аппарата конечных автоматов и нечеткой логики в эколого-экономических моделях / В.В. Меншуткин. – СПб. : Нестор-История, 2017. –133 с.  
ISBN 978-5-4469-1289-6

Монография посвящена применению дискретного подхода к изучению динамики водных экосистем и, в частности, популяциям промысловых рыб. Работа предназначена для исследователей в области эколого-экономического моделирования, а не математикам. Поэтому вначале дается краткий обзор используемого математического аппарата от теории множеств до теории исследования операций. На примерах дискретных моделей популяций рыб и водных беспозвоночных показано, что с помощью дискретного подхода можно воспроизвести не только основные результаты классической теории рыболовства и математической экологии, но и подойти к решению задачи оптимального управления популяциями и сообществами гидробионтов. Демонстрируются примеры применения дискретного подхода и некоторых идей «искусственного интеллекта» к разработке систем оптимального управления экологическими системами озер и водохранилищ с применением эколого-экономических моделей.

Настоящая монография была частично выполнена во время работы автора в Международном экологическом центре (Люмянки, около Варшавы). Это объясняет включение в книгу примеров моделирования эколого-экономических моделей объектов, расположенных на территории Польши (водохранилище Солина, река Варта, гмина Чемерники). Однако теоретическое обоснование и подбор математического аппарата моделирования были начаты в процессе выполнения работ по гранту РФФИ №13-06-00218 уже применительно к Ладожскому озеру и продолжены при частичной поддержке РФФИ (грант № 16-06-00442). Некоторые фрагменты предлагаемой монографии были использованы в книге В.В. Меншуткина "Искусство моделирования". СПб. 2010.

*Ключевые слова: эколого-экономические модели, озерные экосистемы, автоматы, нечеткая логика, рациональное использование природных ресурсов*

*Рецензент: д.ф.-м.н., проф. Г.П. Астраханцев  
Работа выполнялась частично при финансовой поддержке  
гранта РФФИ № 16-06-00442а*

*Технический редактор Т.Р. Минина*

ISBN 978-5-4469-1289-6



**УДК 504.4  
ББК 20.1**

©Меншуткин В.В., 2017  
© ФГБУН Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, 2017  
© Издательство «Нестор-История», 2017

## Введение

В XXI веке экология (в частности, ихтиология и гидробиология) из науки описательной медленно, но неуклонно превращается в науку, которая способна не только констатировать ущерб, нанесенный природе промышленностью и сельским хозяйством, но и выбрать такое взаимодействие между человеческим обществом и природными экосистемами, которые бы минимизировали бы этот ущерб. Решение подобных проблем для конкретных условий неизбежно связано с прогнозированием, которое, в свою очередь, неизбежно влечет построение моделей прогнозируемых объектов. Иными словами, моделирование является неотъемлемой частью современной экологии (Винберг, Меншуткин, 1974; Меншуткин, 2010).

Экологическое моделирование, зародившееся еще в первой трети XX века, с самого начала базировалось на подражании математической физике, которая к этому времени достигла ошеломляющих теоретических и практических успехов. Поэтому совершенно естественным было использование в экологических моделях математического аппарата дифференциальных уравнений в полных и частных (для описания пространственных задач) производных. Поскольку, как правило, экологическим моделированием занимались ученые, имеющие физико-математическое или инженерное, а не биологическое, образование<sup>1</sup>, то такой подход прочно закрепился в течение десятилетий.

Однако к самому концу XX века отлаженная схема экологического моделирования начала давать первые сбои (Гутубалин и др., 1999). Дело тут вовсе не в том, что аппарат дифференциальных уравнений перестал соответствовать возросшему уровню экологических знаний, а в том, что практика стала предъявлять к экологическому прогнозированию и моделированию совершенно иные требования, чем это было на заре использования моделей в экологии.

Эпоха восторгов по поводу того, что при помощи модели можно объяснить возникновение колебаний в системе «хищник-жертва» или хаотичность динамики популяции при нелинейной функции воспроизводства давно прошла. Теперь практика требует прогнозирования последствий тех или иных воздействий со стороны человека на отдельные экосистемы или всю биосферу в целом. Причем прогнозов в инженерном понимании этого термина, т.к. по данным этих прогнозов должны приниматься или отвергаться практические решения, связанные с миллиардными затратами и изменением уровня жизни и здоровья людей (Баканов, 2000).

---

<sup>1</sup> Заметим, что признанный классик применения математических методов в ихтиологии Федор Ильич Баранов (1918) окончил кораблестроительный факультет Петербургского политехнического института.

К такому прогнозированию экологическое моделирование XX века оказалось не готовым (Розенберг и др., 1994). Первый удар был нанесен анализом точности экологических моделей. К такому анализу физики и инженеры давно привыкли и молчаливо полагали, что точность определения экологических параметров примерно такая же, как и у физических и технических систем. При ближайшем рассмотрении выяснилось, что она не только значительно ниже, но, что самое неприятное, во многих случаях вообще не поддается определению. Вся красота решения дифференциальных уравнений сводилась на нет шумящими параметрами этих уравнений. Введение в модели операций с размытыми числами выявило еще более удручающую картину. И все это в предположении, что сами уравнения, например типа Михозелиса-Ментен абсолютно верны для описания трофического поведения рыб, моллюсков, насекомых или ракообразных, хотя выведены эти уравнения для описания динамики ферментативных реакций.

Конечно, самый надежный выход из создавшегося положения состоит в том, чтобы всемерно развивать полевые и лабораторные экологические исследования по уточнению уравнений математической экологии и их параметров. В конце концов, такой путь должен привести к существенному улучшению качества и надежности экологических прогнозов. Но на это уйдут десятилетия, а практические решения нужны уже сегодня. Вернее, они были нужны еще вчера, тогда, возможно было избежать хотя бы части тех экологических ошибок, описание которых занимает основной объем популярных книг по экологии.

Другой путь заключается в сознательном отказе от точности в оценке экологических величин, зависимостей и их параметров. В деле описания природы такой подход имеет давнюю традицию, достаточно вспомнить шкалу Рихтера для землетрясений, оценку скорости ветра по шкале Бофорта, метод Браун-Бланке в лесной фитоценологии или оценку трофности водоемов по Тиннеману и Науману. Однако одно дело оценка состояния, а совсем другое – прогноз этого состояния. Тут нужен математический аппарат для переработки дискретной информации шкалированных величин. В настоящей работе предлагается использовать для этой цели аппарат **конечных автоматов**.

Математический аппарат конечных автоматов развился исходя из потребностей автоматизации проектирования электронных схем – основы современных компьютерных технологий. Однако, став чисто математической дисциплиной теория конечных автоматов оторвалась от породившего ее субстрата и стала частью общечеловеческих знаний, такой, как например, теория вероятностей или высшая алгебра. Поэтому приложение теории конечных автоматов к экологии

ничуть не более противозаконно, чем применение дифференциальных уравнений, которые первоначально предназначались для описания динамики материальной точки.

Методология конечных автоматов неразрывно связана с представлением о дискретности во времени, в пространстве и в оценке переменных. «Непрерывность относится к потенциальности, тогда как действительность неизлечимо атомистична» – так писал философ и математик Альфред Уайтхед (Whitehead, 1969). «Видимо, несколько гиперболизируя, можно сказать, что если физика в широком смысле органически связана с математикой непрерывной, то биология в широком смысле, связана с математикой дискретной» – так писал в одной из своих последних статей основоположник русской школы кибернетики Алексей Андреевич Ляпунов (Ляпунов, Багриновская, 1975). Идея дискретности содержится в самой основе всего живого – в дискретности генетического кода. Клеточная теория и индивидуальный подход при моделировании популяций – это тоже проявление представления о дискретности живой материи. Теория конечных автоматов предлагает только один из возможных инструментов оперирования с дискретными величинами в дискретном времени.

Все человеческие знания, в том числе и экологические, формулируются, в конце концов, средствами естественного языка в виде текстов. Все красоты цветных трехмерных графиков, диаграмм, все премудрости математического формализма – это не более чем концентрация, представление в иной компактной форме тех же предложений с их подлежащими и сказуемыми. Языки, как естественные – человеческие, так и искусственные – компьютерные – это существенно дискретные образования. Как люди мыслят – это до сих пор точно не известно, но вот как формулируют свои мысли известно совершенно точно – при помощи языка или текстов на том или ином языке. Так что, становясь на путь дискретного описания экологических явлений, мы не удаляемся, а приближаемся к магистральному пути человеческого знания.

Но дискретность дискретности рознь. Есть, например, дискретность целых чисел – одна рыба, две рыбы, три рыбы, а вот полторы живых рыбы просто не бывает, как не бывает двух целых и семи десятых членов Польской Академии наук. Но есть и другая дискретность, например, хвойный лес переходит в смешанный, эпиплимнион в гипоплимнион, река в эстуарий и т.д. Здесь резкой границы нет, она размыта, и ученые часто тратят много сил и темперамента на доказательство существования этих границ. Это означает, что понятие дискретности связано с понятием размытости или нечеткости. Более подробно об этом пойдет речь в разделе 1.4, здесь же только подчеркнем, что размытость столь же

объективна, как и дискретность. Физиологи давно установили, что за дискретность более или менее ответственно левое или речевое полушарие головного мозга человека, а за размытость и образность – правое (Pribram, 1975, или более популярно Иванов, 1978) и только их взаимодействие обеспечивает нормальное функционирование человеческого разума. Поэтому и в экологическом моделировании не следует забывать, что за дискретностью таких понятий как экосистема, популяция, биотоп и т.п. всегда скрывается некоторая размытость, которая порождается не только самой природой явления, но и восприятием и интерпретацией этой природы в сознании ученого.

В настоящей работе частично использован опыт, накопленный автором во время работы в Международном экологическом центре (Дзеканув Лесны, Польша), результаты которого в отечественной литературе не публиковались (модели водохранилища Солина и гмины Чемерники).

## **1 Аппарат дискретного моделирования**

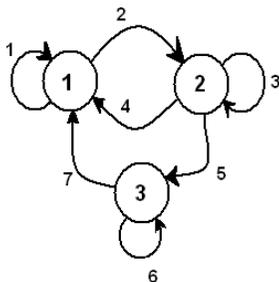
### **1.1 Первое знакомство с дискретным моделированием**

Во введении было сказано, что одним из инструментов дискретного экологического моделирования является конечный автомат. Однако у большинства ихтиологов и гидробиологов слово «автомат» вызывает невольные ассоциации с автоматом Калашникова, автоматической стиральной машиной или с устройством для автоматической продажи прохладительных напитков. Эрудиты вспомнят, что в XVIII веке был автомат для игры в шахматы и автоматические куклы, играющие на скрипке или танцующие полонезы. Однако здесь пойдет речь о совсем других автоматах – абстрактных математических объектах. В разделе 1.5 будет дано строгое математическое определение этого понятия, но для того, чтобы войти в курс дела и, учитывая непривычку экологов к абстрактным понятиям, целесообразно начать с конкретного примера, ибо еще сэр Исаак Ньютон утверждал, что примеры полезнее правил.

В 50-е годы прошлого века сотрудники ГосНИОРХ под руководством Е.В. Бурмакина (1967) проводили мероприятия по преобразованию ихтиофауны озер Ленинградской области посредством уничтожения рыбы полихлорпине-ном. В число объектов такого эксперимента попало и маленькое озеро, которое на финских картах значилось как Херя-ярви. Водился в этом озере только окунь. Бросили сотрудники ГосНИОРХА в озеро положенное количество химикатов и дохлые окуни всплыли на поверхность озера кверху брюхом. Автор этой книги, еще, будучи студентом, участвовал в сборе и обработке этих окуней совместно

с Л.А. Жаковым. Выражаясь научно, озеро Херя-ярви могло находиться в одном из двух состояний: 1 – в озере обитает окунь, 2 – в озере никаких рыб не живет. Предполагалось по замыслу Е.В. Бурмакина еще и третье состояние, при котором в озере поселяется ряпушка, но на практике это так и не было осуществлено. В действительности через несколько лет после внесения полихлорпинена в озере снова появился окунь, что описано в научной статье (Жаков, 1984).

Все описанные выше события могут быть изображены в виде специального рисунка (рис. 1.1.1) – графа (строгое определение графа будет дано в разделе 1.2, а в разделе 1.5 будет показано, что точнее говорить не о графе, о графоиде, но оставим пока в стороне эти терминологические тонкости), а сама ихтиофауна озера Херя-ярви с переходами из одного состояния в другое и есть пример конечного автомата (строгое определение автомата будет дано в разделе 1.5).



**Рис. 1.1.1.** Граф переходов автомата моделирующего процесс изменения ихтиофауны в озере Херя-ярви.

*Цифры в кружочках* – номера состояний (1 – озеро заселено окунем, 2 – в озере рыбы нет, 3 – озеро заселено ряпушкой). *Цифры возле стрелок* – воздействия (1 – в озере остается окунь, 2 – озеро отравлено полихлорпиненом, 3 – озеро сохраняется обезрыбленным, 4 – в озере восстанавливается окунь, 5 – в озеро вселяется ряпушка, 6 – в озере сохраняется ряпушка, 7 – ряпушка в озере вытесняется окунем)

Рис. 1.1.1 дает наглядное изображение всего того, что может происходить на нашем участке. Обратите внимание на «петли» – стрелки, которые выходят и заходят в одно и то же состояние, – это признак того, что со временем состояние участка не меняется. Однако, граф – это не единственный способ описания свойств автомата – можно представить те же самые данные в табличной форме.

Таблица 1.1.1 устроена так – строки соответствуют состояниям автомата в прошлом году (был в озере окунь или ряпушка, или никого не было), а колонки (столбцы) тому, что происходит весной (отравляем озеро, вселяем ряпушку или окунь восстанавливается сам по себе). В клетке помещается номер того состояния, в которое придет ихтиофауна озера (автомат) к концу этого года. Например,

озеро будет пусто (состояние 2), окунь (столбец 2) – в клетке цифра 2 – это значит, что озеро перешло в состояние 2. Не все переходы имеют смысл, например, не следует отравлять озера, если в нем прижилась ряпушка. Нетрудно убедиться в том, что данные таблицы 1.1.1 идентичны тому, что изображено на рис. 1.1.1.

**Таблица 1.1.1.** Таблица (матрица) переходов автомата

Состояния автомата	Воздействия на автомат			
	1, 3, 6 нет воздействия	2 отравление	5 вселение ряпушки	7 восстановление окуня
1 – в озере обитает окунь	1	2		
2 – ихтиофауна отсутствует	2	2	3	
3 – в озере обитает ряпушка	3	2		1

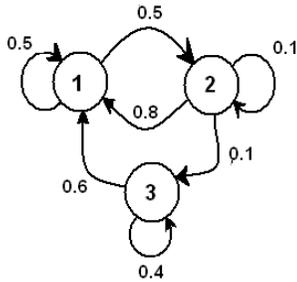
Теперь, пользуясь таблицей или графом можно заняться предсказанием того, что будет происходить с ихтиофауной озера Херя-ярви, если будет задано его начальное состояние и последовательность воздействий (это действие называется исследованием модели).

Предположим, что в год 0 в озере обитал только окунь, в год 1 произведено внесение полихлорпинена, а в годы 2 и 3 производилось вселение мальков ряпушки. Однако зоопланктон в озере Херя-ярви крайне беден и ряпушка там не прижилась. Уже без антропогенного воздействия в озере снова стал обитать окунь. Произошло ли это вследствие того, что не все особи окуня погибли от полихлорпинена, или икра окуня была занесена в озеро точно не известно. Результаты поведения системы приведены в таблице 1.1.2.

**Таблица 1.1.2.** Протокол функционирования детерминированного автомата

Время (годы)	0	1	2	3	4	5	6
Воздействие		2	5	5	7	7	7
Состояние	1	2	3	3	1	1	1

Рассмотренное выше представление о попытке изменения ихтиофауны озера вряд ли можно признать удачным. Если действие полихлорпинена еще можно с некоторой натяжкой признать точно предсказуемым, то результаты вселения мальков ценных пород рыб зависят от очень большого числа факторов (Карпевич, 1975), которые достаточно трудно определить. В лучшем случае можно указать вероятности того или иного события (о вероятностях подробнее сказано в разделе 1.3). Предположим, что мы знаем вероятности переходов нашего автомата, например, вероятность того, что автомат может перейти из состояния 1 в состояние 2 с вероятностью 0.5. Все это можно изобразить в виде графа (рис. 1.1.2).



**Рис. 1.1.2.** Граф переходов вероятностного автомата моделирующего процесс изменения ихтиофауны.

*Цифры в кружочках – номера состояний (1 – окунь, 2 – отсутствие рыб, 3 – ряпушка).  
Цифры возле стрелок – вероятности переходов*

Матрица переходов вероятностного автомата (табл. 1.1.3) устроена несколько по иному, чем детерминированного. Здесь в строках приводятся состояния предыдущего года, а в столбцах – нынешнего. В клетках – вероятности переходов.

В случае вероятностного автомата таблицу, подобную таблице 1.1.2, так просто уже не написать – ее можно только имитировать путем подбрасывания монеты или игральной кости для изображения вероятности. Однако можно прибегнуть и к более современному средству – компьютеру (о применении компьютеров в экологическом моделировании смотрите Меншуткин (2010) раздел о вероятностном моделировании).

**Таблица 1.1.3.** Таблица (матрица) переходов вероятностного автомата

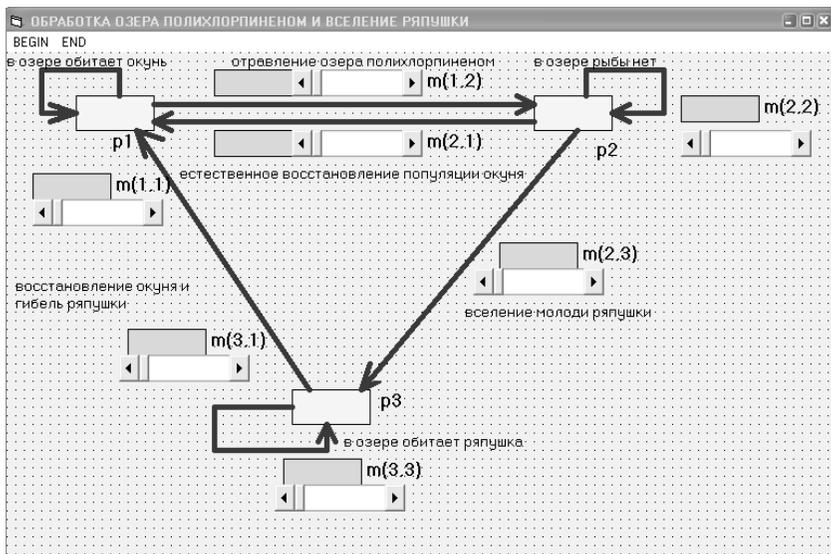
Состояния автомата в предыдущий год	Состояния автомата в нынешний год		
	1 – окунь	2 – пусто	3 – ряпушка
1 – окунь	0,9	0,1	0,0
2 – пусто	0,8	0,1	0,1
3 – ряпушка	0,6	0,0	0,4

**Таблица 1.1.4.** Протокол функционирования вероятностного автомата

Время (годы)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Вариант 1	1	2	3	1	1	2	1	1	2	1	1	1	1	1	2	1
Вариант 2	1	1	1	1	2	3	3	1	1	1	2	1	1	1	1	2
Вариант 3	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	3

В таблице 1.1.4 приведено три варианта функционирования вероятностного автомата, полученные при помощи датчика случайных чисел компьютера. Видно, что в первом варианте из 15 лет удачно вселить ряпушку удалось только один раз на третьем году эксперимента. Во втором варианте ряпушке удалось просуществовать всего два года ( $t=5$  и  $t=6$ ), а в третьем всего на самый последний год эксперимента.

На рис. 1.1.3 представлен интерфейс программы для расчета предельных вероятностей нахождения ихтиоценоза озера.



**Рис. 1.1.3.** Интерфейс программы для расчета предельных вероятностей нахождения ихтиоценоза озера при различных вероятностях процессов отравления озера полихлорпином, вселения молоди ряпушки и восстановления популяции окуня

Для вероятностных автоматов подобного типа (подробности в разделе 1.5) существует аналитический способ для нахождения предельного значения вероятностей нахождения системы в каждом состоянии. В нашем случае для этого надо решить простую систему линейных алгебраических уравнений, что умеет каждый школьник.

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 + p_3 &= 1, \\
 0.5 p_1 &= 0.8 p_2 + 0.6 p_3, \\
 0.5 p_1 &= 0.8 p_2 + 0.1 p_2,
 \end{aligned}$$

здесь  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$  – предельные вероятности нахождения автомата в состоянии 1, 2 или 3. Решая эту систему, получаем:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= 0.607, \\
 p_2 &= 0.337, \\
 p_3 &= 0.056.
 \end{aligned}$$

Полученный результат означает, что в предельном случае, если на озеро Херя-ярви будут приезжать сотрудники с полихлорпиненом с вероятностью в 0.5 каждый год и выпускать молодь ряпушки с вероятностью выживания 0.1, то ряпушка может быть обнаружена в этом озере только с вероятностью 0.056. С вероятностью 0.607 в озере будет обнаружен окунь.

Рассмотренный выше пример утрировано упрощен. В действительности отравление было произведено только один раз, а молодь ряпушки вообще до озера довести не удалось. Этот пример призван только ввести читателя в проблематику дискретного экологического моделирования. Многие разделы математики, на которых базируется дискретное моделирование, обычно плохо известны или вовсе не известны большинству экологов, поэтому авторы взяли на себя смелость в самом кратком и конспективном виде изложить их в последующих разделах этой главы. Конечно, отбор материала был крайне субъективен и никак не освобождает читателя от обращения к серьезным и обстоятельным монографиям по затрагиваемым вопросам. По своему личному опыту и опыту своих коллег авторы знают, как трудно биологу, а особенно полевому экологу, изучать математические дисциплины, даже в том случае если он понимает их полезность и даже необходимость в своей практической работе. При этом автор больше надеется на примеры, чем на формальные определения.

## 1.2 Теория множеств и теория графов

**Множеством** называется совокупность каких угодно объектов. Например, можно рассматривать множество всех озер России, множество возрастных групп в развитии копеподы, множество всех целых чисел или множество всех молекул ДНК, составляющих геном щуки. Всякое множество состоит из **элементов**. Например, озеро Байкал – это элемент множества всех озер России. Если множество обозначить символом  $S$ , а его элемент символом  $s$ , то утверждение о том, что  $s$  является элементом множества  $S$ , записывается как:

$$s \in S.$$

Если же объект  $s$  не является элементом множества  $S$  (например, озеро Чад не является элементом множества озер России), то это записывается как:

$$s \notin S.$$

Множество может задаваться простым перечислением его элементов:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}.$$

Например, множество стран света ( $Q$ ) состоит из элементов: север ( $N$ ), юг ( $S$ ), восток ( $E$ ) и запад ( $W$ ).

$$Q = \{N, S, E, W\}.$$

Заметим, что порядок перечисления элементов никакого значения не имеет, чтобы подчеркнуть этот факт, иногда говорят о **неупорядоченном** множестве, чтобы отличить его от **упорядоченного** множества или **кортежа**.

Число элементов множества называется **мощностью** множества или **кардинальным числом**, например, мощность множества стран света равняется четырем.

$$|Q| = 4.$$

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется **пустым** множеством и обозначается как  $\emptyset$ . Например, множество всех озер России с глубиной более 2000 м является пустым множеством. Множество, которое содержит все объекты данного типа, называется **универсальным** множеством. Например, множество всех озер Земного шара – это универсальное множество.

Кроме прямого перечисления элементов, множество можно задавать, описывая типичные свойства элемента, входящего в это множество. Например, множество озер России можно определить, как множество только тех озер, которые находятся на территории Российской Федерации. Множество эвтрофных озер можно определить как множество озер, суточная первичная продукция в которых превосходит 1000 миллиграмм углерода на квадратный метр поверхности озера (Китаев, 2007, табл. 15.27, стр. 208). Символически условие вхождения элемента в данное множество записывается справа от вертикальной черты внутри фигурных скобок. Например,

$$L_e = \{lake \in L \mid P_{lake} > 1000\},$$

где  $L$  – множество всех озер,  $L_e$  – множество эвтрофных озер,  $lake$  – элемент множества всех озер,  $P_{lake}$  – первичная продукция.

Теперь перейдем к операциям над множествами. Если все элементы множества  $A$  являются одновременно и элементами множества  $B$ , то можно говорить о том, что множество  $A$  **вложено** в множество  $B$ , или что множество  $A$  есть **подмножество** множества  $B$ . Например, множество озер Польши вложено во множество озер Европы и является его подмножеством. Символически записывается это так:

$$A \subset B$$

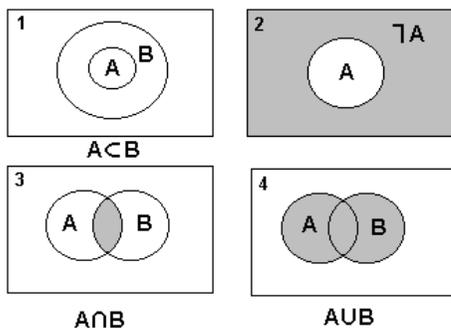
Если множество  $A$  является подмножеством  $B$  и одновременно множество  $B$  является подмножеством  $A$ , то множество  $A$  **тождественно** множеству  $B$  ( $A = B$ ). Например, множество озер России тождественно множеству озер, которые находятся на территории государства РФ.

**Дополнением** данного множества ( $\neg A$ ) называется такое множество, которое вместе с данным составляет универсальное множество. Например, множество

всех не российских озер является дополнением множеству озер России, поскольку вместе они составляют все озера мира, т.е. универсальное множество.

**Произведение** или **пересечение** множеств ( $A \cap B$ ) – это такое множество, каждый элемент которого является обязательно и элементом множества  $A$  и элементом множества  $B$ . Например, перенесение множества всех эвтрофных озер мира с множеством озер России дает множество эвтрофных озер России.

**Сумма** или **объединение** множеств ( $A \cup B$ ) – это такое множество, каждый элемент которого является или элементом множества  $A$ , или элементом множества  $B$ , или тем и другим вместе. Например, объединение множества гиперэвтрофированных озер с множеством озер зараженных токсикантами дает множество озер с водой не пригодной для питья.



**Рис. 1.2.1.** Схема операциями над множествами.

- 1 – вложение множества  $A$  в множество  $B$ , 2 – дополнение множества  $A$ ,
- 3 – произведение или пересечение множеств  $A$  и  $B$ ,
- 4 – сумма или объединение множеств  $A$  и  $B$

Операции над множествами обладают многими интересными свойствами, которые существенно отличаются от свойств операций над числами. Например, сумма множества с самим собой дает исходное множество:

$$A \cup A = A$$

Это свойство **идемпотенции**. Для чисел это совсем не так ( $3+3=6$ ). С умножением множеств дело обстоит аналогично:

$$A \cap A = A$$

Снова совсем не так как в арифметике ( $3 \times 3=9$ ). А ведь действительно, если к озерам России прибавить все озера России, то ничего кроме озер России получить не удастся.

Свойство **коммутативности** в алгебре множеств совсем такое же, как в обычной арифметике («от перестановки слагаемых сумма не меняется»):

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cup B = B \cup A$$

Это же можно сказать и о свойстве **ассоциативности**

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

А вот свойство **абсорбции** арифметического аналога не имеет:

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Действительно, если  $A$  – множество озер Норвегии, а  $B$  – множество озер Швеции, то  $A \cup B$  – это множество всех озер Скандинавии. Если теперь из скандинавских озер выделить только норвежские, то получаются только озера Норвегии, а озера Швеции тут вроде бы и ни при чем.

К операциям с множествами применима **теорема Де Моргана**:

$$\neg(A \cap B) = \neg A \cup \neg B$$

**Разбиением** множества на подмножества называется выделение в множестве ( $A$ ) таких подмножеств ( $X, Y, Z$ ), которые при пересечении между собой дают пустые множества, а их объединение дает исходное множество  $A$ .

$$A = X \cup Y \cup Z; \quad X \cap Y = \emptyset; \quad X \cap Z = \emptyset; \quad Y \cap Z = \emptyset.$$

Операция разбиения является основой всякой четкой классификации.

Например, каждая особь может входить в состав одного и только одного вида, каждый вид может входить в состав только одного семейства и т.д. С другой стороны, классификация должна быть полной, т.е. любой объект множества  $A$  обязательно является членом какого-либо подмножества, составляющего разбиение.

**Декартовым произведением** множеств ( $Z = A \times B$ ) называется множество, элементами которого являются пары, составленные из всех элементов первого множества ( $a \in A$ ) со всеми элементами второго множества ( $b \in B$ ). Например, если  $A$  – множество трофических типов озер ( $A = \{O, M, E\}$ ,  $O$  – олиготрофные,  $M$  – мезотрофные и  $E$  – эвтрофные озера), а  $B$  – классификация озер по загрязненности токсикантами ( $B = \{C, P\}$ , где  $C$  – озера чистые,  $P$  – озера загрязненные), то декартово произведение этих множеств будет состоять из шести элементов:  $OC$  – олиготрофные чистые,  $OP$  – олиготрофные грязные,  $MC$  – мезотрофные чистые,  $MP$  – мезотрофные грязные,  $EC$  – эвтрофные чистые,  $EP$  – эвтрофные грязные озера.

**Отображением** множества  $A$  в множество  $B$  называется постановка в соответствие каждому элементу первого множества ( $a \in A$ ) элемента второго множества ( $b \in B$ ), что может быть символически записано как  $F: a \rightarrow b$ , где  $F$  – символ отображения. Например, множество озер мира может быть отображено в множество действительных чисел, представляющих собой максимальные глубины этих озер. Это отображение будет **однозначным**, поскольку каждому озеру

соответствует одна и только одна максимальная глубина. Обратное отображение уже будет не однозначным, а **многозначным**, поскольку многие озера могут иметь одинаковую максимальную глубину. Если каждому элементу одного множества соответствует только один элемент другого множества и, наоборот, каждому элементу другого множества соответствует только один элемент первого множества, то такое отображение называется **взаимно однозначным соответствием**. Например, множество людей и множество отпечатков пальцев связано взаимно однозначным соответствием, что широко используется на практике.

**Граф** – это отображение множества самого на себя (Белов и др. 1976; Бердж, 1968; Оре, 1968). Граф, обозначаемый  $G=(X,F)$ , полагается заданным, если задано множество элементов  $X$  и отображение  $F$  множества  $X$  в  $X$ . Например,  $X$  может быть множеством основных городов Европейской России  $X= \{\text{Санкт-Петербург, Москва, Ярославль, Вологда, Екатеринбург, Челябинск, Самара, Волгоград, Воронеж, Краснодар, Новороссийск}\}$ . Отображение  $F$  соответствует наличию прямого сообщения между городами.  $F$ : Москва  $\rightarrow$  {Санкт-Петербург, Ярославль, Самара, Волгоград, Воронеж},  $F$ : Санкт-Петербург {Москва, Вологда},  $F$ : Челябинск {Екатеринбург, Самара} и т.д. Этот граф представлен на рис. 1.2.2. Множество элементов изображено в виде точек и называется множеством **вершин**. В данном примере – это множество городов. Пары элементов множества, входящие в отображение  $F$ , изображаются линиями и называются **ребрами** графа.

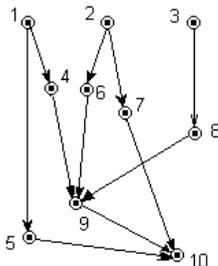


**Рис. 1.2.2.** Граф основных коммуникаций Европейской части России

Если отображению из одной вершины в другую всегда соответствует обратное отображение (как в случае с железными дорогами России), то граф называется **неориентированным**. Если сформулированное выше условие не выполняется, то граф называется **ориентированным**, вместо линий на рисунке

появляются стрелки, которые называются **дугами** (в отличие от ребер неориентированного графа). Если какая-либо из вершин графа имеет отображение в себя, то дуга, соответствующая такому отображению, называется **петлей**.

Примером ориентированного графа может служить схема трофических отношений в сообществе рыб озера Вожже (Жаков, 1984). Множество  $X$  на рис. 1.2.3 состоит из 10 элементов.  $X = \{1 - \text{зоопланктон}, 2 - \text{бентос}, 3 - \text{детрит}, 4 - \text{мелкие планктофаги}, 5 - \text{крупные планктофаги}, 6 - \text{мелкие бентофаги}, 7 - \text{крупные бентофаги}, 8 - \text{детритофаги}, 9 - \text{мелкие хищники}, 10 - \text{крупные хищники}\}$ .



**Рис. 1.2.3.** Граф трофических связей в сообществе рыб озера Воже:  
 1 – зоопланктон, 2 – бентос, 3 – детрит, 4 – мелкие планктофаги,  
 5 – крупные планктофаги, 6 – мелкие бентофаги, 7 – крупные бентофаги,  
 8 – детритофаги, 9 – мелкие хищники, 10 – крупные хищники

Отображение  $F$  ставит в соответствие источник корма и его потребителя. Например,  $F$ : зоопланктон  $\rightarrow$  {мелкие планктофаги, крупные планктофаги} или  $F$ : мелкие хищники  $\rightarrow$  крупные хищники.

Прежде, чем перейти к описанию графов при помощи матриц, следует напомнить само понятие матрицы и некоторых ее свойств.

**Матрицей** называется математический объект представляющий систему из  $m \times n$  чисел (или иных величин) расположенных в виде таблицы из  $m$  **строк** и  $n$  **столбцов**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Если  $m = n$ , то матрица называется **квадратной**. В настоящей книге большинство матриц квадратные. Совокупность элементов матрицы с одинаковыми индексами называется **диагональю** матрицы. Матрица, обладающая свойством  $a_{ij} = a_{ji}$ , называется **симметричной**.

Граф  $G=(X, F)$  может быть описан при помощи **матрицы смежности**  $R$ .

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix}$$

Элемент матрицы  $r_{ij}$  равен единице тогда, когда имеется дуга, идущая из вершины  $x_i$  в вершину  $x_j$ , в противном случае элемент матрицы  $r_{ij}$  равен нулю. Например, матрица смежности для железных дорог Европейской России (рис. 1.2.2) имеет вид (нумерация вершин показана на рисунке):

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку это неориентированный граф, то его матрица смежности симметрична относительно главной диагонали.

### 1.3 Дискретные случайные величины

Как уже было понятно из раздела 1.1 дискретное моделирование использует некоторые понятия теории вероятностей, поэтому полезно напомнить те положения этой теории. Систематическое и подробное изложение имеется в специальных руководствах (Аксютин, 1968).

Простейшая дискретная случайная величина называется **событием** и может принимать всего два значения – событие может произойти, а может и не произойти. Например, величина биологического потребления кислорода (БПК<sub>5</sub>) в реке Луге может соответствовать III–классу чистоты вод, а может и не соответствовать. **Вероятностью** появления некоторого события называется отношение числа случаев благоприятствующих появлению данного события к общему числу случаев. Например, из 15 измерений БПК<sub>5</sub> в 2000 году только 6 соответствовали III – классу чистоты вод, значит вероятность квалификации Луги по III –классу чистоты составляет:

$$P(A) = 6/15 = 0.4.$$

Вероятность случайного события  $A$  есть неотрицательная величина, заключенная между 0 и 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Вероятность **достоверного** события равна 1, а вероятность **невозможного** равна 0.

Вероятность объединения двух **несовместных** событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Например, если вероятность того, что по БПК<sub>5</sub> Луга принадлежит к III –классу чистоты равна 0.4 и вероятность того, что по Луга по БПК<sub>5</sub> принадлежит к II –классу чистоты равна 0.1, то вероятность того, что Луга принадлежит к II или III классу чистоты равна 0.5. А вот складывать вероятности принадлежности Лути к III классу чистоты по БПК<sub>5</sub> и по содержанию общего фосфора таким способом нельзя, так как это вполне совместимые события.

Вероятность наступления события  $A$ , вычисленная при условии наступления события  $B$ , называется **условной вероятностью**  $P(A|B)$ . Например, для тех случаев, вода в реке Луге не удовлетворяла III классу чистоты (была более загрязнена), то вероятность неудовлетворительного качества по фосфору составляла 0.9.

Вероятность **совмещения** двух событий равна вероятности одного события умноженной на условную вероятность наступления другого события относительно первого.

$$P(AB) = P(A) \times P(B|A).$$

Например, вероятность того, что вода в Луге не удовлетворительна и по БПК<sub>5</sub> и по фосфору равна:

$$P(AB) = 0.6 \times 0.9 = 0.54.$$

Только для случая **независимых** событий их вероятности можно умножать

$$P(AB) = P(A) \times P(B).$$

Например, вероятность того, что вода в Луге не удовлетворительна по БПК<sub>5</sub> и вероятность вооруженного конфликта в Ираке можно получить умножением этих вероятностей, поскольку рассматриваемые события, по всей видимости, независимы.

Вероятность объединения двух **совместных** событий равна сумме их вероятностей минус вероятность одновременного наступления этих событий.

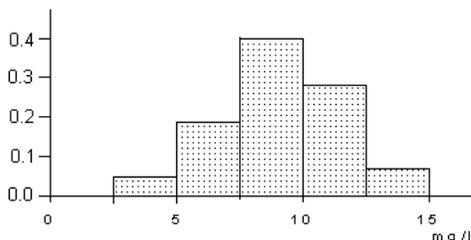
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Например, если рыба в течение года может погибнуть от естественных причин с вероятностью 0.8, а быть выловленной сетями с вероятностью 0.5 и если полагать события естественной и промысловой смертности независимыми, то результирующая вероятность гибели рыбы будет:

$$P(M) = 0.8 + 0.5 - 0.8 \times 0.5 = 0.9.$$

**Случайная величина** в отличие от случайного события, которое определено на двухэлементном множестве, определяется на конечном (это **дискретная случайная величина**) или бесконечном (это **непрерывная** случайная величина) множестве. В настоящей монографии в большинстве случаев мы имеем дело с дискретными случайными величинами. Например, в разделе 4.1. среднегодовая температура воздуха может принимать одно из четырех дискретных значений.

**Закон распределения** случайной величины устанавливает связь между возможными значениями случайной и соответствующими им вероятностями. Для дискретных случайных величин закон распределения представляется в виде **гистограммы**. Пример подобной гистограммы приведен на рис. 1.3.1.

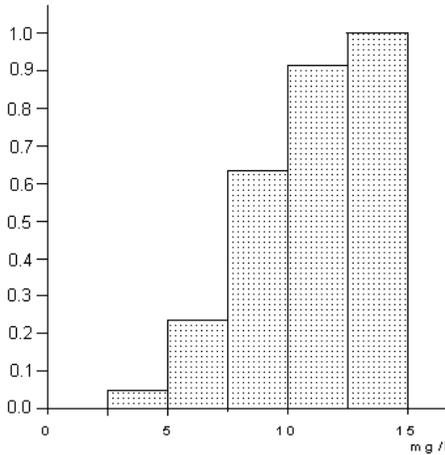


**Рис. 1.3.1.** Гистограмма (функция распределения) величины концентрации растворенного в воде кислорода в реке Луга за период с 1990 по 2000 год. Вероятность того, что концентрация кислорода в воде составляла от 2.5 до 5 мг/л, равняется 0.05, от 5 до 7.5 мг/л она составляла 0.19, от 7.5 до 10 мг/л она составляла 0.40, от 10 до 12.5 мг/л она составляла 0.28 и от 12.5 до 15 мг/л она составляла 0.08. Заметим, что сумма вероятностей всех составляющих случайной величины должна быть равной единице ( $0.05 + 0.19 + 0.4 + 0.28 + 0.08 = 1.0$ ).

**Кумулятивная или интегральная функция распределения** случайной величины называется задание выполнения неравенства  $X < x$ , где  $X$  — случайная величина, а  $x$  — текущее значение вероятности.

$$F(x) = \sum_{x < x_i} P(x = x_i)$$

Для концентрации растворенного в воде реки Луга кислорода интегральная функция распределения приведена на рис. 1.3.2. Последовательные значения этой функции 0.15, 0.24 ( $0.05+0.19$ ), 0.64 ( $0.24+0.4$ ), 0.92 ( $0.64+0.28$ ), 1.0 ( $0.92+0.08$ ).



**Рис. 1.3.2.** Кумулятивная или интегральная функция распределения величины концентрации растворенного в воде кислорода в реке Луга за период с 1990 по 2000 год

Вероятность появления случайной величины в интервале  $[\alpha, \beta]$  равна разности значений интегральной функции распределения на концах этого интервала:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

Вычислим для случайной величины концентрации растворенного кислорода в воде Варги основные характеристики:

**Математическое ожидание** (среднее)  $M(X) = m = \sum_{i=1}^5 p_i x_i = 9.125$ .

**Дисперсию** (стандартное отклонение)  $\sigma(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - m)^2 p_i} = 2.46$ .

Асимметрию  $A(X) = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - m)^3 p_i}{\sigma(X)^3} = -0.12$ .

Экссесс  $E(X) = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - m)^4 p_i}{\sigma(X)^4} - 3 = -0.35$ .

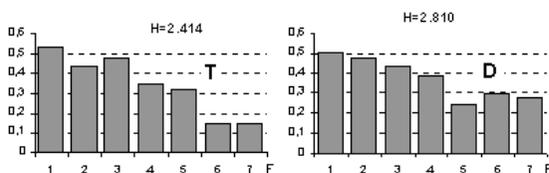
Небольшая отрицательная асимметрия изучаемой случайной величины свидетельствует о том, что функция ее распределения (рис. 1.3.3) немного скошена вправо, а отрицательный эксцесс говорит о том, что функция распределения более полого, нежели нормальное распределение.

Часто бывает нужно знать степень разнообразия распределения случайной величины. Для этого можно вычислить **энтропию** (H) этого распределения

$$H(X) = -\sum_{i=1}^m p_i \log_2 p_i$$

Здесь логарифм берется по основанию 2, поскольку энтропия распределения выражается в двоичных единицах информации битах. Перейти от десятичных логарифмов к двоичным можно при помощи множителя  $1/\log_{10}(2) = 3.3219$ .

Для примера рассмотрим распределения ихтиомасс основных видов рыб в северных регионах (Китаев, 1984), которые представлены на рис. 1.3.3. Энтропия в зоне тайги оказывается больше, а разнообразие меньше, чем в зоне смешенных лесов. Если бы все рыбы имели одинаковую биомассу, то энтропия достигала бы максимального значения (в данном случае 2.81).



**Рис. 1.3.3.** Распределения ихтиомасс основных видов рыб в северных озерах; Т – в зоне тайги, D – в зоне смешенных лесов. (1 – окунь, 2 – плотва, 3 – щука, 4 – ерш, 5 – налим, 6 – лещ, 7 – карась)

В экологии понятие энтропии широко применяется под названием индекса разнообразия Шеннона и вычисляется как:

$$H = -\sum_{i=1}^n \left( \frac{N_i}{N} \right) \log_2 \left( \frac{N_i}{N} \right)$$

$$H = -\sum_{i=1}^n \left( \frac{B_i}{B} \right) \log_2 \left( \frac{B_i}{B} \right)$$

где  $n$  – число видов или популяций в сообществе или экосистеме,  $N_i, B_i$  – численность или биомасса  $i$ -ой популяции,  $N, B$  – суммарная численность или биомасса.

Все рассмотренные выше характеристики распределения дискретной случайной величины важны в тогда, когда мы уже располагаем этим распределение как результатом наблюдения или модельных экспериментов. Посмотрим, как получаются простейшие распределения.

Из статистических сведений по состоянию среды в Лодзинском воеводстве (Raport, 2000) явствует, что в реке Нер вероятность того, что воды этой реки по аммонийному азоту можно отнести к III классу чистоты, составляет  $p = 0.28$ , во всех остальных случаях ( $q = 1 - p = 0.72$ ) вода загрязнена настолько, что выпадает из классификации. Спрашивается, какова вероятность того, что за неделю будет два дня, когда вода Нера по аммонийному азоту удовлетворяет III классу чистоты.

По правилу умножения вероятностей (поскольку предполагается, что загрязнения в каждый день не зависимы друг от друга, что, вообще говоря, не совсем справедливо) получаем, что вода два дня подряд будет чистой с вероятностью  $p \times p = 0.28 \times 0.28 = 0.078$ , один день чистой, а один грязной с вероятностью  $2 \times p \times q = 2 \times 0.28 \times 0.72 = 0.481$  (множитель два потому, что могут быть два случая первый день грязная вода, второй – чистая и наоборот), оба дня с грязной водой  $q \times q = 0.72 \times 0.72 = 0.518$ . Это можно записать в виде многочлена, в котором каждый член соответствует вероятности числа дней с чистой водой.

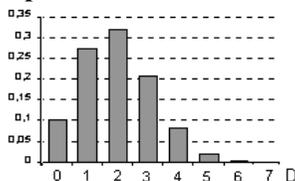
$$P(2) = p^2 + 2pq + q^2.$$

Продолжая подобные рассуждения 7 раз, получим следующее соотношение:

$$P(7) = p^7 + 7p^6q + 21p^5q^2 + 35p^4q^3 + 35p^3q^4 + 21p^2q^5 + 7pq^6 + q^7.$$

Подставив в это выражение значения вероятности  $p=0.28$  и  $q=0.72$ , получим функцию распределения, изображенную на рис. 1.3.4. Численное значение члена  $21p^2q^5=0.318$  – это и есть ответ на поставленный выше вопрос.

Распределения такого типа называются **биномиальными**, поскольку коэффициенты в них соответствуют разложению бинома Ньютона  $(p+q)^n$ . При увеличении числа  $n$  до бесконечности распределение становится непрерывным, а закон этого распределения **нормальным**.



**Рис. 1.3.4.** Распределение количества дней в недели, в которые вода реки Нер удовлетворяет условиям III класса чистоты вод по аммонийному азоту

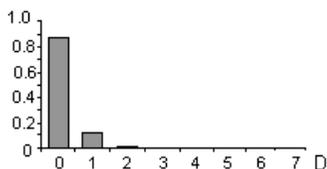
Математическое ожидание для биномиального распределения вычисляется по соотношению:  $m=np$ .

А стандартное отклонение равно  $\sigma = \sqrt{npq}$ .

В случае примера с рекой Нер  $m=1.98$ ,  $\sigma=1.18$ .

Важным частным случаем биномиального распределения является **распределение Пуассона**, которое получается в тех случаях, когда одна из вероятностей ( $p$  или  $q$ ) значительно больше другой. Поэтому распределение Пуассона называют еще и распределением редких событий.

Если в предыдущем примере заменить аммонийный азот в реке Нер на фосфаты, то вероятность  $p$  существенно уменьшится ( $p=0.02$ ), что приведет к распределению, показанному на рис. 1.3.5.



**Рис. 1.3.5.** Распределение количества дней в недели, в которые вода реки Нер удовлетворяет условиям III класса чистоты вод по фосфатам

Вероятность того, что за неделю будет два дня, когда вода Нера по фосфатам удовлетворяет III классу чистоты, составляет в этом случае всего 0.0076.

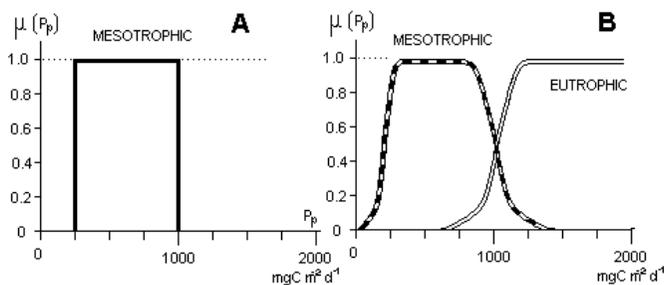
Для распределения Пуассона среднее значение очень близко к дисперсии.

### 1.4 Размытые множества и нечеткая логика

В разделе 1.2 было дано определение множества и продемонстрированы некоторые операции с этими множествами. При этом полагалось, что элемент может являться членом какого-либо множества, а может и не являться, а третьего не дано. Однако, как это подчеркивалось во введении, экология и гидробиология, в частности, характерны принципиальной нечеткостью многих своих понятий. Например, трофическое состояние водоема. Известно довольно много шкал, которые связывают трофический статус водоема с величиной первичной продукции, концентрацией хлорофилла «а», биомассой зоопланктона, коэффициентом разнообразия Шеннона (Китаев, 1984; Алимов, 2000). Одна из таких шкал приведена в таблице 3.4.1. Каждый гидробиолог интуитивно понимает, что никакой резкой границы между мезотрофными и эвтрофными нет и не редки случаи, когда по одним показателям озеро является эвтрофным, а по другим мезотрофным (например, Андронникова, Мокиевский, 1984). Так что идея размытости вполне органична для экологии, надо только придать этой размытости строгое количественное оформление, что и сделал профессор Калифорнийского университета Люфти Заде в 1965 году (Zadeh, 1965).

Начнем с того, что несколько формализуем понятие обычного четкого множества введением **функции принадлежности**  $\mu(x)$ . Если данный объект  $x$  является элементом множества  $X$  ( $x \in X$ ), то его функция принадлежности равна единице ( $\mu(x)=1$ ), в противном случае она равна нулю ( $\mu(x)=0$ ). Вся идея нечетких множеств заключается в том, что функция принадлежности может принимать значения не только ноль и единица, но и любые иные в промежутке от нуля до единицы.

Поясним сказанное примером. Z. Kajak (1998) приводит (стр. 218) таблицу, из которой следует, что мезотрофными называются озера с первичной продукцией от 250 до 1000  $\text{mgC m}^{-2} \text{d}^{-1}$  (d –сутки).



**Рис. 1.4.1.** Определение трофического статуса озера (*A* – четкое, *B* – размытое)

На рис. 1.4.1 представлено понимание термина «мезотрофия» в четкой (*A*) и размытой (*B*) интерпретации. В первом случае озеро с первичной продукцией  $1000 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  является мезотрофным, а с продукцией  $1005 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  – это уже эвтрофное озеро. Не говоря уже о точности определения первичной продукции, с первого взгляда видна условность такого деления. При нечетком подходе величине продукции в  $1000 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  соответствует значение функции принадлежности  $0.5$  ( $\mu_M(1000)=0.5$ ), при продукции  $800 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  – это единица ( $\mu_M(800)=1.0$ ), а при первичной продукции в  $2000 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  – это нуль ( $\mu_M(2000)=0.0$ ). Сказанное означает, что при продукции  $800 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  мы полностью уверены, что перед нами мезотрофное озеро, в случае  $1000 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  наша уверенность сокращается на половину, а при  $2000 \text{ mgC m}^{-2} \text{ d}^{-1}$  никаких разговоров о мезотрофии быть не может – это явно эвтрофное озеро.

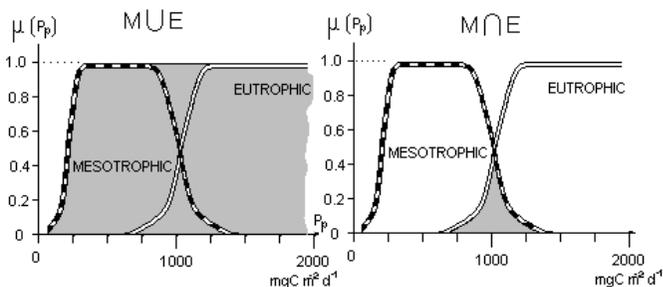
Конечно, определение функции принадлежности во многом дело субъективное. У Роберта Ветцеля она одна, а у Георгия Георгиевича Винберга была несколько другая. Величина  $\mu_M(x)$  означает действительно **субъективную** оценку степени принадлежности объекта  $x$  к множеству  $A$ .

Часто субъективность отождествляют с антинаучностью и всячески стараются ее избежать, во всяком случае, в печатных публикациях. Понятие нечеткости придает субъективности ясную количественную интерпретацию и вводит ее в круг научного знания.

Обратим внимание на связь четкого и размытого множеств. По существу, всякое четкое множество является частным случаем размытого множества со специфической функцией принадлежности.

Для размытых множеств действительны все те операции, которые применимы к четким множествам (раздел 1.2), однако для нечетких множеств имеется несколько вариантов объединения и пересечения.

На рис. 1.4.2 показаны функции принадлежности объединения и пересечения множества мезотрофных и эвтрофных озер.



**Рис. 1.4.2.** Объединение ( $M \cup E$ ) и пересечение ( $M \cap E$ ) размытых множеств.

$$\mu_{M \cup E}(P_p) = \min(1, \mu_M(P_p) + \mu_E(P_p))$$

$$\mu_{M \cap E}(P_p) = \min(\mu_M(P_p), \mu_E(P_p))$$

В разделе 3.3 используются операции нечеткой логики, однако сначала придется напомнить основные положения классической **двузначной логики**, которая признает только две оценки высказываний – **истинно** или **ложно** («True» или «1» и «False» или «0» на языке современных компьютеров). Итак, в классической логике (или соответствующей ей булевой алгебре) переменная может принимать только два значения 0 или 1. Одноместная (т.е. с одним аргументом) операция в классической логике всего одна – **отрицание**.

$$\bar{x} = 1 - x$$

Если, например, утверждается, что вода в реке Варте удовлетворяет III классу чистоты, то отрицание этого положения соответствует тому, что вода в реке Варте не удовлетворяет III классу чистоты.

Некоторые (всего их 16) двухместные операции классической логики представлены в таблице 1.4.1.

**Таблица 1.4.1.** Основные функции двузначной логики

Название	Формула	Значение			
		$X=0, Y=0$	$X=0, Y=1$	$X=1, Y=0$	$X=1, Y=1$
Конъюнкция (AND)	$Z = X \wedge Y$	0	0	0	1
Дизъюнкция (OR)	$Z = X \vee Y$	0	1	1	1
Импликация (IF)	$Z = X \rightarrow Y$	1	1	0	1
Эквивалентность (EQV)	$Z = X \leftrightarrow Y$	1	0	0	1
Исключающее «или» (EXOR)	$Z = X \oplus Y$	0	1	1	0

Например, если установлено, что некоторое озеро эвтрофно ( $X$ ) и что в нем обитают караси ( $Y$ ), то утверждение о том, что в этом озере обитают караси и оно эвтрофно, соответствует **конъюнкции**, а утверждение о том, что или в озере

обитают караси, или оно эвтрофно, или и то и другое вместе, соответствует **дизъюнкции**. Особое значение для экологического моделирования имеет операция импликации. Если в озеро эвтрофное, то в нем водятся караси – это типичная **импликация**. По существу, матрицы переходов автоматов, которые рассматриваются в главе 1, представляют собой собрание импликаций такого типа: «Если озеро находилось в олиготрофном состоянии, и фосфорная нагрузка увеличилась, то озеро перейдет в мезотрофное состояние». Утверждение, следующее после слова «если» называется **антецедентом** или **предпосылкой**, а после «то» – **заключением** или **выводом**. При первом знакомстве с логикой обычно возникает интуитивное возмущение операцией импликации, которая при ложной предпосылке позволяет считать истинным любое утверждение. Например, истинна следующая импликация «если в Сулеевском водохранилище в изобилии водятся крокодилы, то вода в этом водохранилище обладает всеми качествами пива марки «Крулевское»» или «если все овцы квадратные, то овец кормят электрическим током».

Размытая или нечеткая логика является расширением классической логики на большее чем два число значений истинности. Одной из первых нечетких логик была логика Лукасевича, в которой было три значения 1 – истинно,  $\frac{1}{2}$  – неопределенность и 0 – ложно. В таблице 1.4.2. приведены значения основных функций в логике Лукасевича.

**Таблица 1.4.2.** Основные функции логики Лукасевича

X	Y	$Z = X \wedge Y$	$Z = X \vee Y$	$Z = X \rightarrow Y$	$Z = X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0	1	1
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	1

Таблица 1.4.2 показывает, что в тех случаях, где фигурирует только истина и лож, логика Лукасевича полностью совпадает с классической, но там где появляется неопределенность появляются различия. Например, если озеро эвтрофное, но о том, что в эвтрофных озерах обязательно водятся караси нам ничего не известно ( $Y=\frac{1}{2}$ ), то и о карасях в данном озере мы ничего сказать не можем. Кроме логики Лукасевича существуют другие трехзначные логики (Клини, Бочвара,

Рейхенбаха, Хейтинга), но для разрушения стереотипа деления всех высказываний только на абсолютно истинные и заведомо ложные, беглого знакомства с логикой Лукасевича вполне достаточно.

Теперь перейдем к **нечеткой логике**, которая имеет непрерывный спектр значений истинности от заведомой лжи (0) до неоспоримой истины (1). Начнем с того, что нечетких логик существует много. В таблице 1.4.3 приведены основные операции для наиболее простых и употребительных на практике случаев.

Обратимся к примерам. Типичное экологическое приложение конъюнкции – это определение продукции растений (PROD) в зависимости от интенсивности света (LIGHT) и поступления биогенов (PHOS):

$$\text{PROD} = \text{LIGHT} \wedge \text{PHOS}.$$

**Таблица 1.4.3.** Основные функции различных типов нечетких логик

Операция	Минимаксная логика	Ограничительная логика	Вероятностная логика
Отрицание	$1 - x$	$1 - x$	$1 - x$
Конъюнкция	$\min(x, y)$	$\max(0, x+y-1)$	$xy$
Дизъюнкция	$\max(x, y)$	$\min(1, x+y)$	$x + y - xy$

В минимаксной логике это приводит к закону Либиха  $\text{PROD} = \min(\text{LIGHT}, \text{PHOS})$ , который часто применяется в моделях фитопланктона (Jorgensen, 1998). В вероятностной логике это приводит к выражению  $\text{PROD} = \text{LIGHT} \times \text{PHOS}$ , которое находит применение в моделях фитоценозов леса (Botkin, 1986). Применения ограничительной логики в экологическом моделировании автору не известны.

Типичное экологическое приложение дизъюнкции – это определение общей смертности рыб (MORT) в зависимости от интенсивности промысла (FISHERY) и естественной смертности от воздействия хищников (PRED):

$$\text{MORT} = \text{FISHERY} \vee \text{PRED}$$

В случае применения вероятностной логики это приводит к известному в ихтиологии соотношению между промысловой и естественной смертностью:

$$\text{MORT} = \text{FISHERY} + \text{PRED} - \text{FISHERY} \times \text{PRED}.$$

Применение минимаксной логики соответствует экологической концепции «узкого места» или «решающего фактора»:

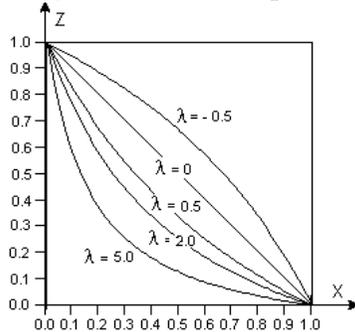
$$\text{MORT} = \max(\text{FISHERY}, \text{PRED}).$$

Перечисленными в таблице 1.4.3 зависимостями далеко не исчерпывается богатство операций нечеткой логики. Например, формула, аналогичная формуле для отрицания в классической логике ( $\bar{x} = 1 - x$ ), оказывается для размытой логики далеко не единственной.

Операция отрицания  $\bar{x} = (x, \lambda)$  осуществляется при помощи соотношения:

$$\bar{x} = \frac{1-x}{1+\lambda x},$$

где  $\lambda$  – коэффициент „жесткости” логической связи отрицания. При  $\lambda = 0$  зависимость приобретает вид прямой линии с угловым коэффициентом  $-1$  (рис. 1.4.3). При  $\lambda > 0$  эта зависимость приобретает вид вогнутой в сторону оси абсцисс кривой, что соответствует более «жесткому» или категоричному отрицанию. Наоборот, при  $\lambda < 0$  зависимость приобретает вид выпуклой кривой, что соответствует более «мягкому» или менее категоричному отрицанию.



**Рис. 1.4.3.** Функция отрицания в нечеткой логике

Поясним сказанное примером. Предположим, что истинность высказывания: «В эвтрофном озере есть зимний дефицит кислорода» мы оцениваем на среднем уровне ( $x=0.6$ ), а вот истинность обратного высказывания «В эвтрофном озере нет зимнего дефицита кислорода» следует оценить не  $1-0.6 = 0.4$ , а ниже, т.к. никакой дополнительной информации об этом озере нет и гарантировать отсутствие замора рискованно – в данном случае уместно «жесткое» отрицание.

Операция конъюнкции  $z = (x, y, \lambda)$  осуществляется при помощи соотношения:

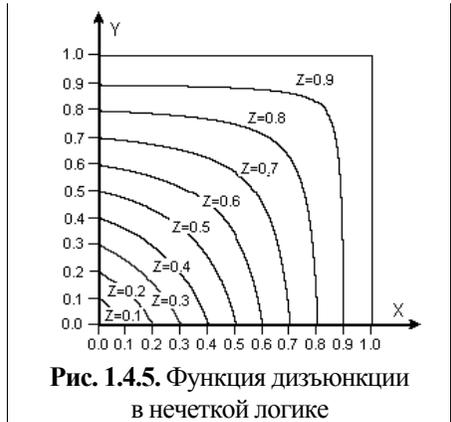
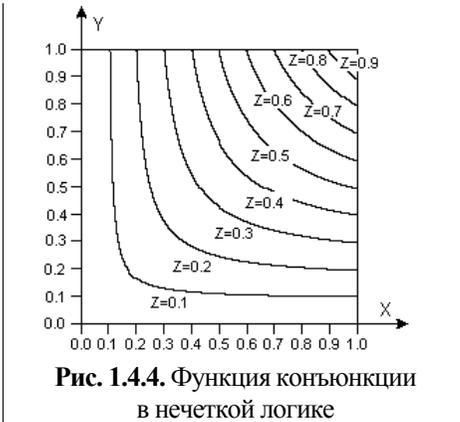
$$z = \frac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)}$$

где  $\lambda$  – коэффициент «жесткости» конъюнкции. При  $\lambda=1$  зависимость приобретает вид произведения исходных переменных, что можно уподобить случаю перемножения вероятностей двух независимых событий (рис. 1.4.4). При  $\lambda > 1$  зависимость приобретает более «жесткий» характер, т.е. для уверенности в истинности величины  $z$  требуется очень высокая уверенность в истинности каждой из исходных переменных ( $x$  и  $y$ ). «Мягкая» конъюнкция ( $\lambda < 1$ ) соответствует случаю, при котором требования к высокой достоверности исходных переменных снижаются. При  $\lambda < 0$  формула не имеет смысла.

Операция дизъюнкции  $z = (x, y, \lambda)$  осуществляется при помощи соотношения:

$$z = \frac{x + y - (\lambda - 1)xy}{1 + \lambda xy}$$

где  $\lambda$  – коэффициент «жесткости» дизъюнкции. При  $\lambda = 1$  зависимость приобретает вид  $x + y - xy$ , что можно уподобить случаю сложения вероятностей двух событий (рис. 1.4.5). При  $\lambda > 1$  зависимость, в противоположность зависимости для конъюнкции, приобретает более «мягкий» характер, т.е. для уверенности в истинности величины  $z$  требуется хоть какая-то уверенность в истинности одной из исходных переменных ( $x$  и  $y$ ). «Жесткая» дизъюнкция ( $\lambda < 1$ ) соответствует случаю, при котором истинность величины  $z$  определяется наибольшей истинностью любой из исходных переменных. Иными словами, при этом дизъюнкция приближается к функции жесткого максимума. При  $\lambda < 0$  формула не имеет смысла.



Важной при построении дискретных моделей и экспертных систем является функция нечеткой импликации или нечеткого вывода.

### 1.5 Конечные автоматы

Теория конечных автоматов берет свое начало от прикладных задач конструирования электротехнических и электронных схем, что наложило некоторый отпечаток на применяемую в ней терминологию. Однако в настоящее время – это оформившийся раздел дискретной математики с широким спектром приложений, в числе которых есть и экология. В настоящем разделе излагаются самые общие сведения из теории конечных автоматов, которые необходимы для понимания последующего изложения. Подробные сведения в строгом математическом изложении можно найти в специальных монографиях (Айзерман и др. 1963; Гилл, 1966; Глушков, 1962; Мелихов, 1971; Цетлин, 1970). В разделе 1.2

приводятся краткие сведения о теории множеств и теории графов, которые используются в настоящем разделе и важны для его понимания.

Конечным автоматом называется такой математический объект, который может находиться в одном из конечного множества состояний  $q \in Q$  и изменять это состояние при воздействии внешнего сигнала  $x \in X$ . При этом автомат может влиять на другие объекты посредством выходного сигнала  $y \in Y$ . Конечный автомат функционирует в дискретном времени – это означает, что переход из одного состояния в следующее осуществляется скачком через промежуток времени  $\Delta t$ . Если переходы происходят через равные промежутки времени, то автомат называется **синхронным**, если через разные, то **асинхронным**. В дальнейшем будут рассматриваться только синхронные автоматы.

Состояние автомата в момент времени  $t$   $q(t)$  однозначно определяется предыдущим состоянием  $q(t-1)$  и входным воздействием  $x(t)$ .

$$q(t) = \varphi(q(t-1), x(t)),$$

где  $\varphi$  – **функция переходов**.

Выходной сигнал  $y(t)$  всегда следует за входным сигналом  $x(t)$ . Если полагается, что сначала после поступления входного сигнала генерируется выходной сигнал, а уж затем происходит переход автомата в новое состояние, то такой автомат называется **автоматом Мили** и определяется соотношениями:

$$q(t) = \varphi(q(t-1), x(t))$$

$$y(t) = \phi(q(t-1), x(t)),$$

где  $\phi$  – **функция выходов**.

Если полагать, что после получения входного сигнала, автомат сначала переходит в новое состояние, а уж потом генерирует выходной сигнал, то такой автомат называется **автоматом Мура** и определяется соотношениями:

$$q(t) = \varphi(q(t-1), x(t))$$

$$y(t) = \phi(q(t), x(t))$$

Если выходной сигнал определяется только состоянием автомата, то такой автомат называется **правильным**. В дальнейшем изложении будут рассматриваться только правильные автоматы Мура.

Способы задания автомата могут быть аналитическими, геометрическими и матричными.

Аналитическое задание автомата предусматривает задание пяти объектов:

1. конечного множества  $X = \{x_i\}$ , называемогося **входным алфавитом**,
2. конечного множества  $Y = \{y_i\}$ , называемогося **выходным алфавитом**,

3. конечного множества  $Q = \{q_i\}$ , называющегося **алфавитом состояний**,
4. элемента  $q_1 \in Q$ , называемого **начальным состоянием**,
5. **отображения**  $F$  множества  $Q$  в себя, которое любому  $q \in Q$  и каждому входному сигналу  $x \in X$  сопоставляет состояние  $q_k \in Q$ , определяющееся функцией переходов  $\varphi(q, x)$  и выходной сигнал  $y \in Y$ , определяющееся функцией выходов  $\phi(q, x)$ .

Таким образом, автомат  $(A)$  можно символически выразить как совокупность пяти объектов:

$$A = \langle X, Q, Y, q_1, F(q \in Q, x \in X) \rangle$$

Геометрический способ задания автомата сводится к изображению ориентированного графа, вершинами которого являются состояния автомата ( $q_k \in Q$ ), а около каждого ребра  $(q_k, q_l)$  ставится значение входного сигнала ( $x \in X$ ), вызывающего переход автомата из состояния  $q_k$  в состояние  $q_l$ . Кроме этого каждое ребро отмечается значением выходного сигнала ( $y \in Y$ ).

Графы с нагруженными ребрами<sup>2</sup> обычно называются графоидами, поэтому **ориентированный графоид** – это геометрическая интерпретация абстрактного автомата.

Рассмотрим **матричный** метод задания автомата. Функция переходов может быть представлена в виде матрицы, столбцы которой соответствуют исходными состояниям, колонки – входным сигналам, а сам элемент матрицы является результирующим состоянием автомата.

$$\varphi(q, x) = \begin{pmatrix} \varphi(q_1, x_1) & \varphi(q_2, x_1) & \varphi(q_3, x_1) & \dots & \varphi(q_n, x_1) \\ \varphi(q_1, x_2) & \varphi(q_2, x_2) & \varphi(q_3, x_2) & \dots & \varphi(q_n, x_2) \\ \varphi(q_1, x_3) & \varphi(q_2, x_3) & \varphi(q_3, x_3) & \dots & \varphi(q_n, x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(q_1, x_m) & \varphi(q_2, x_m) & \varphi(q_3, x_m) & \dots & \varphi(q_n, x_m) \end{pmatrix}$$

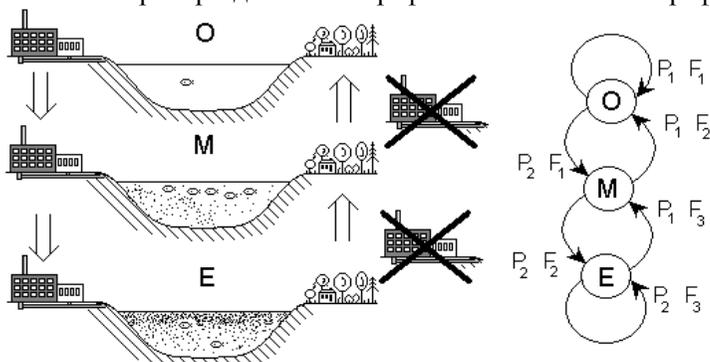
где  $n$  – число возможных состояний автомата,  $m$  – число возможных входных сигналов. Аналогичным образом может быть построена матрица выходов автомата.

Бывает полезным создание **матрицы соединений**, элементами которой являются входные сигналы, столбцы соответствуют исходным состояниям автомата, а строки – результирующим состояниям. Если никакое внешнее

<sup>2</sup>Нагруженное ребро графа – это такое ребро, которому поставлена в соответствие некоторая величина, в данном случае это значения входного и выходного сигналов.

воздействие не может перевести автомат из состояния  $q_k$  в состояние  $q_l$ , то элемент матрицы соединений с индексами  $(k, l)$  является нулевым.

Поясним введенные понятия простейшим примером. Рассмотрим небольшое олиготрофное озеро. Если на берегу этого озера будет построен населенный пункт с развитой промышленностью (рис. 1.5.1), то фосфорная нагрузка на водоем увеличится и озеро перейдет из олиготрофного состояния в мезотрофное.



**Рис. 1.5.1.** Моделирование процесса изменения трофического статуса озера при помощи конечного автомата с тремя состояниями.

$O$  – олиготрофное,  $M$  – мезотрофное и  $E$  – эвтрофное состояния водоема. Входное воздействие:  $P_1$  – низкая фосфорная нагрузка,  $P_2$  – высокая фосфорная нагрузка. Выход:  $F_1$  – низкий вылов рыбы,  $F_2$  – высокий вылов рыбы,  $F_3$  – средний вылов рыбы

Если высокая фосфорная нагрузка на озеро будет сохраняться, то водоем не удержится в мезотрофном состоянии и станет эвтрофным. Если же будут приняты меры к снижению фосфорной нагрузки, но озеро может вернуться к первоначальному олиготрофному состоянию.

Озеро находящиеся в эвтрофном состоянии при сохранении высокой фосфорной нагрузки будет сохранять свое состояние, однако существенное снижение интенсивности поступления биогенных элементов в водоем может привести к переходу водоема в мезотрофное состояние. Если рассматривать в качестве выхода моделируемой системы вылов рыбы, то в олиготрофном водоеме он будет минимальным, в мезотрофном вылов существенно увеличится, а в олиготрофных условиях может быть ниже, чем в мезотрофных, например из-за заморных явлений и бурного развития сине-зеленых водорослей. Сказанное, конечно, крайне упрощает действительность и годится только в качестве иллюстративного примера.

В рассматриваемом случае множество состояний автомата состоит из трех элементов  $Q = \{O, M, E\}$ , где  $O$  – олиготрофное,  $M$  – мезотрофное и  $E$  – эвтрофное состояния водоема. Множество входов состоит всего из двух элементов

$X = \{P_1, P_2\}$ , где  $P_1$  – низкая фосфорная нагрузка, а  $P_2$  – высокая фосфорная нагрузка. Множество выходов состоит из трех элементов  $Y = \{F_1, F_2, F_3\}$ , где  $F_1$  – низкий вылов рыбы,  $F_2$  – высокий вылов рыбы, а  $F_3$  – средний вылов рыбы. Графоид автомата изображен в правой части рис. 1.5.1.

Матрица переходов рассматриваемого автомата имеет вид:

$$\varphi(q, x) = \begin{vmatrix} O & O & M \\ M & E & E \end{vmatrix}$$

Матрица выходов рассматриваемого автомата имеет вид:

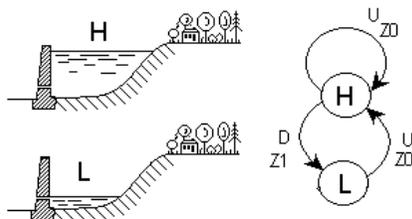
$$\phi(q, x) = \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Матрица соединений для данного автомата принимает форму:

$$R(q, q) = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 0 \\ p_1 & 0 & p_2 \\ 0 & p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

Продолжим краткое изложение элементов теории автоматов. Автомат, у которого функция входа постоянна, называется **автономным автоматом**. Для автономных автоматов справедливо следующее утверждение: всякий автономный автомат из любого начального состояния за конечное число временных шагов приходит или к устойчивому стационарному состоянию или к устойчивому циклу. Это свойство автоматов согласуется с весьма широким распространением в живой и неживой природе периодических явлений, которые совершенно не обязательно связаны с периодичностью внешних воздействий. Климатические циклы, биологические часы, нейронные пейсмекеры, турбулентные пульсации температуры и скорости течения тому примером.

Автомат называется **вполне определенным автоматом**, если отображение  $F$  выполняется для любой пары элементов  $q$  и  $x$ . Если это условие не выполняется, то автомат называется **частичным**. Иначе, частичным автоматом называется автомат, у которого функция переходов или выходов определена не для всех пар значений  $q \in Q$  и  $x \in X$  – в матрицах это символизируется нулевым элементом или прочерком. В приведенном выше примере с эвтрофированием озера автомат является вполне определенным. Однако если рассматривать модель срабатывания уровня воды из водохранилища (рис. 1.5.2), то для состояния минимально низкого уровня воды входное воздействие в виде срабатывания уровня не имеет смысла и называется запрещенным. Таким образом, для частичного автомата можно определить области допустимых и запрещенных внешних воздействий.



**Рис. 1.5.2.** Моделирование процесса изменения уровня водохранилища при помощи конечного автомата с двумя состояниями.

$H$  – высокое положение уровня,  $L$  – низкое положение уровня. Входное воздействие:

$D$  – слив воды из верхнего бьефа,  $U$  – отсутствие пропуска воды через плотину.

Выход:  $Z1$  – выработка электроэнергии,  $Z0$  – нет выработки электроэнергии

Состояние автомата называется **достижимым**, если оно является начальным состоянием или в него можно попасть из другого достижимого состояния. (Обращаем внимание на рекурсивность этого определения – в естественных науках определение понятия с использованием того же понятия считается запрещенным приемом и связывается с логическим «порочным кругом», однако в математике это вполне узаконенный прием, который понимают даже компьютеры – например, обращение процедуры к самой себе разрешено в большинстве языков программирования высокого уровня). Автомат, все состояния которого достижимы, называется **связным**.

Перейдем к обзору важной для экологических приложений **структурной теории автоматов**, которая занимается взаимодействием автоматов между собой.

В определении **произведения** двух автоматов можно выделить два случая: автоматы имеют разные входные алфавиты ( $K=A \times B$ ) и автоматы имеют общий входной алфавит ( $K=A \otimes B$ ). Рассмотрим первый случай. Пусть исходные автоматы имеют вид:

$$A = \langle X, Q, Y, q_1 \in Q, F(x \in X / y \in Y) \rangle$$

$$B = \langle U, W, V, w_1 \in W, P(u \in U / v \in V) \rangle,$$

а результирующий автомат представлен в форме:

$$K = \langle Z, H, S, h_1 \in H, R(z \in Z / s \in S) \rangle$$

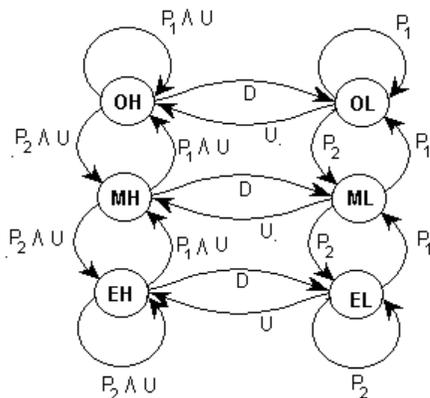
Множество состояний результирующего автомата ( $H$ ) представляет собой декартово произведение<sup>3</sup> множеств исходных автоматов ( $H=Q \times W$ ). Аналогично определяются множества входов и выходов результирующего автомата ( $Z=X \times U, S=Y \times V$ ).

<sup>3</sup> Определение понятия декартова произведения множеств дано в разделе 1.2.

Поясним операцию умножения автоматов примером. Предположим, что возникла необходимость одновременного рассмотрения процессов эвтрофикации и изменения уровня водохранилища. Иными словами, надо создать автомат, который бы объединял свойства автоматов, графоиды которых изображены на рис. 1.5.1 и 1.5.2. Декартово произведение множеств состояний обоих автоматов будет состоять их 6 элементов:

$$H = \{OH, OL, MH, ML, EH, EL\},$$

где  $OH$  – олиготрофия при высоком положении уровня воды,  $OL$  – олиготрофия при низком положении уровня воды,  $MH$  – мезотрофия при высоком положении уровня воды,  $ML$  – мезотрофия при низком положении уровня воды,  $EH$  – эвтрофия при высоком положении уровня воды,  $EL$  – эвтрофия при низком положении уровня воды. На рис. 1.5.3 показан графоид результирующего автомата, причем для упрощения функции выходов не показаны.



**Рис. 1.5.3.** Графоид автомата, являющегося произведением автоматов, изображенных на рис. 1.5.1 и 1.5.2

Состояния:  $OH$  – олиготрофия при высоком положении уровня воды,  $OL$  – олиготрофия при низком положении уровня воды,  $MH$  – мезотрофия при высоком положении уровня воды,  $ML$  – мезотрофия при низком положении уровня воды,  $EH$  – эвтрофия при высоком положении уровня воды,  $EL$  – эвтрофия при низком положении уровня воды. Входные воздействия:  $D$  – слив воды из верхнего бьефа,  $U$  – отсутствие пропуска воды через плотину,  $P_1$  – низкая фосфорная нагрузка,  $P_2$  – высокая фосфорная нагрузка.

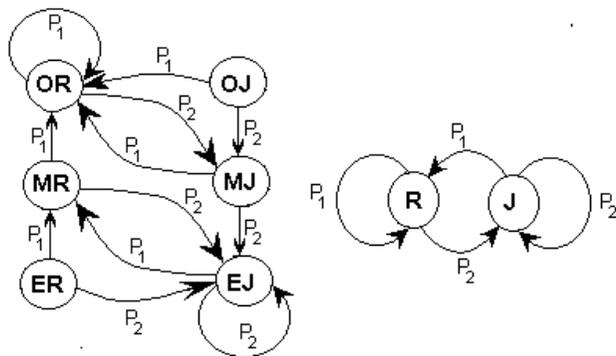
Полученный автомат является частичным, так как имеет запрещенные входы (нельзя сливать воду из мертвого объема водохранилища!), но связным, так как все его состояния достижимы. Заметим, что сохранение водохранилища в

олиготрофном состоянии при высоком положении уровня требует комбинации воздействий низкой фосфорной нагрузки и не срабатывания уровня ( $p_1 \wedge U$ ).

Перейдем к случаю умножения двух автоматов, которые имеют общий входной алфавит ( $K=A \otimes B$ ). Содержательно это означает, что в отличие от рассмотренного выше случая, одни и те же входные сигналы могут воздействовать на состояния автомата  $A$  и автомата  $B$ . Начнем сразу с примера и попытаемся объединить уже рассмотренный автомат эвтрофирования водоема с автоматом кислородного режима (рис. 1.5.4).

Полагаем, что высокая фосфорная нагрузка вызывает сокращение содержания кислорода в воде водохранилища, а низкая приводит к восстановлению нормального кислородного режима. Конечно, в природе все происходит несравненно более сложно, так что приведенный пример не более чем иллюстрация операций с абстрактными автоматами.

Как и в первом случае умножения автоматов, множество состояний результирующего автомата определяется как декартово произведение множеств состояний исходных автоматов.



**Рис. 1.5.4.** Графоид автомата, имитирующего кислородный режим водоема (справа) и графоид автомата, являющегося произведением автоматов эвтрофикации (рис. 1.5.1) и автомата кислородного режима (слева). Состояния:  $R$  – высокое содержание кислорода в воде,  $J$  – низкое содержание кислорода в воде,  $OR$  – олиготрофия при высоком содержании кислорода,  $OJ$  – олиготрофия при низком положении уровня воды,  $MR$  – мезотрофия при высоком положении уровня воды,  $MJ$  – мезотрофия при низком положении уровня воды,  $ER$  – эвтрофия при высоком положении уровня воды,  $EJ$  – эвтрофия при низком положении уровня воды. Входные воздействия:

$P_1$  – низкая фосфорная нагрузка,  $P_2$  – высокая фосфорная нагрузка

Различие заключается в том, функция отображения результирующего автомата определяется как объединение по элементам множества входных сигналов ( $x \in X$  – в данном примере фосфорная нагрузка на водоем) элементов отображения исходных автоматов:

$$Rv = \bigcup_{x \in X} (F_x q \times P_x w)$$

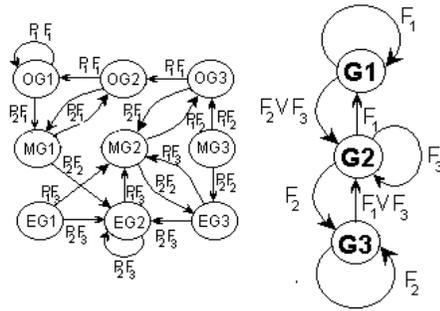
Для случая умножения автомата эвтрофикации и автомата кислородного режима графоид результирующего автомата приведен на рис. 1.5.4. Заметим, что если состояния  $OJ$  и  $ER$  не служат в качестве начальных состояний, то эти состояния являются недостижимыми. Действительно, олиготрофное озеро с сильным дефицитом кислорода – это редкое исключение из лимнологической практики.

Операция **суперпозиции** автоматов ( $N=A \times B$ ) заключается в том, что выходной сигнал автомата  $A$  является входным сигналом для автомата  $B$ . Естественно, что при этом выходной алфавит автомата  $A$  должен совпадать с входным алфавитом автомата  $B$ . Результирующий автомат  $N$ :

$$N = \langle X_1, H, Y_2, h_1 \in H, S(x \in X_1 / y \in Y_2) \rangle$$

имеет множество входов, совпадающее с множеством входов автомата  $A$  и множество выходов, совпадающее с множеством выходов автомата  $B$ . Множество состояний автомата  $N$  определяется как декартово произведение множеств состояний автоматов  $A$  и  $B$ .

Обратимся к конкретному примеру и создадим суперпозицию автомата эвтрофикации водоема с автоматом, имитирующим рыбное хозяйство, основанное на вылове рыбы из этого водоема (рис. 1.5.5). Предполагается, что рыбное хозяйство может находиться в состоянии слабого ( $G1$ ), среднего ( $G2$ ) и высокого развития ( $G3$ ). Переход из одного состояния в другое определяется выловами рыбы, причем устойчивое состояние  $G1$  соответствует вылову  $F1$ , состояние  $G2$  соответствует вылову  $F3$ , а состояние  $G3$  соответствует вылову  $F2$ , причем выловы рыбы являются выходами автомата эвтрофикации водоема. Графоид результирующего автомата представлен на рис. 1.5.5. Слабое развитие рыбного хозяйства в сочетании с эвтрофным состоянием водоема оказалось недостижимым состоянием системы, если только оно не являлось начальным состоянием. Заметим, что при принятых предположениях создать стабильное высокоразвитое рыбное хозяйство оказалось невозможным, поскольку дающее наивысшие величины уловов мезотрофное состояние водоема не стабильно. Наиболее рациональным с точки зрения рыбного хозяйства представляется чередование высоких и низких фосфорных нагрузок с тем, чтобы система колебалась от состояния  $MG2$  к состоянию  $EG3$  и обратно.



**Рис. 1.5.5.** Графоид автомата, имитирующего развитие рыбного хозяйства (справа), и графоид автомата, являющегося суперпозицией автоматов эвтрофикации (рис. 1.5.1) и автомата рыбного хозяйства (слева).

Состояния:  $G1$  – слабое,  $G2$  – среднее и  $G3$  – высокое развитие рыбного хозяйства,  $OG1, OG2$  и  $OG3$  – олиготрофное состояние водоема в сочетании со слабым, средним и высоким развитием рыбного хозяйства,  $MG1, MG2$  и  $MG3$  – мезотрофное состояние водоема в сочетании со слабым, средним и высоким развитием рыбного хозяйства,  $EG1, EG2$  и  $EG3$  – мезотрофное состояние водоема в сочетании со слабым, средним и высоким развитием рыбного хозяйства. Входные воздействия:  $P_1$  – низкая фосфорная нагрузка,  $P_2$  – высокая фосфорная нагрузка,  $F_1$  – низкий вылов рыбы,  $F_2$  – высокий вылов рыбы,  $F_3$  – средний вылов рыбы

На этом закончим беглый обзор структурной теории автоматов и перейдем к понятию **вероятностного** автомата. Для простоты будем рассматривать вероятностные автоматы без выходов.

$$A = \langle X, Q, q_1 \in Q, \varphi(q, x) \rangle,$$

где  $X = \{x_j\}, j \in J = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  – входной алфавит, состоящий из  $m$  элементов,  $Q = \{q_i\}, i \in I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  – множество состояний, причем  $q_1 \in Q$  – начальное состояние автомата,  $\varphi(q, x)$  – функция, которая задает отображение множества  $Q \times X$  в множество матриц  $P = \{P_j\}, j \in J = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ , называемое таблицей переходных вероятностей. Для каждой пары  $(q, x)$  имеет место

$$\varphi(q, x) = \{p_1(q, x), p_2(q, x), p_3(q, x), \dots, p_m(q, x)\}; p_i(q, x) \geq 0, \sum_i p_i(q, x) = 1.$$

Матрицы, составленные из неотрицательных элементов, причем сумма элементов в каждой строке равняется единице, называются **стохастическими матрицами**, которые составляют содержание функции переходов вероятностного автомата.

Вернемся к примеру эвтрофикации водоема. Предположим, что если водоем находится в олиготрофном состоянии, то при низкой фосфорной нагрузке за время одного временного шага вероятность сохранить это состояние составляет 0.8. Вероятность же перехода в мезотрофное состояние при тех же условиях составляет 0.2. Если водоем находится в мезотрофном состоянии, то вероятность его возвращения в олиготрофное состояние составляет 0.6, а вероятность сохранить свое состояние 0.4. В случае эвтрофного состояния вероятность сохранения

этого состояния будем полагать 0.2 (в основном за счет внутренней фосфорной нагрузки), а переходы в мезотрофное и олиготрофное состояния 0.3 и 0.5 соответственно.

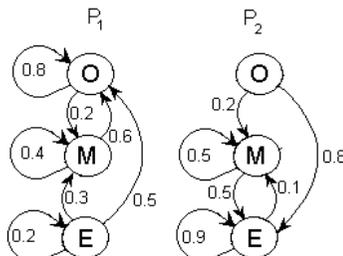
При принятых вероятностях переходов матрица переходов для входного воздействия  $P_1$  примет вид:

$$P_{P_1} = \begin{vmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{vmatrix}$$

Аналогичным образом можно сконструировать матрицу переходов и для случая высокой фосфорной нагрузки:

$$P_{P_2} = \begin{vmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{vmatrix}$$

На рис. 1.5.6 представлен графоид вероятностного автомата, имитирующего изменения трофического статуса экологической системы водоема.



**Рис. 1.5.6.** Графоид вероятностного автомата, имитирующего процессы изменения трофического статуса водоема.

$P_1$  – малая фосфорная нагрузка,  $P_2$  – высокая фосфорная нагрузка.  $O$  – олиготрофное состояние водоема,  $M$  – мезотрофное состояние водоема,  $E$  – эвтрофное состояние водоема. Числа при дугах графоида – вероятности переходов

По существу, детерминированные автоматы, рассмотренные в начале этого раздела, являются частными случаями вероятностных автоматов, у которых матрицы вероятностных переходов принимают значение единицы. На случай вероятностных автоматов распространяются все приемы композиции автоматов (умножение, суммирование, суперпозиция), которые специально рассматриваться не будут.

Если для автономного детерминированного автомата предельными (финальными) являются устойчивые состояния или циклы, то для автономного вероятностного автомата можно определить **финальные вероятности** нахождения автомата в каждом состоянии ( $pf_i$ ). Для нахождения этих финальных

вероятностей следует решить систему алгебраических уравнений, в правой части которых находятся финальные вероятности для  $i$ -го состояния, а в левой – сумма произведений для финальных вероятностей для каждого состояния на вероятность перехода из этого состояния в  $i$ -е состояние ( $p_{ji}$ ).

$$pf_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} pf_j \quad \sum_{j=1}^n pf_j = 1$$

Для примера, изображенного на рис. 1.5.6. такая система уравнений будет иметь вид:

$$pfO = 0.8 pfO + 0.6 pfM + 0.5 pfE$$

$$pfM = 0.2 pfO + 0.4 pfM + 0.3 pfE$$

$$pfE = 0.0 pfO + 0.0 pfM + 0.2 pfE$$

$$pfO + pfM + pfE = 1$$

Решая эту систему, получаем  $pfO = 0.75$ ,  $pfM = 0.25$ ,  $pfE = 0.0$ . Это означает, что если в течение длительного времени будут сохраняться условия низкой фосфорной нагрузки, то три четверти времени водная экосистема будет находиться в олиготрофном состоянии и одну четверть времени в мезотрофном, а эвтрофное состояние вообще окажется недостижимым (если, конечно оно не было начальным).

Запишем систему уравнений для условий высокой фосфорной нагрузки:

$$pfO = 0.0 pfO + 0.0 pfM + 0.0 pfE$$

$$pfM = 0.2 pfO + 0.5 pfM + 0.1 pfE$$

$$pfE = 0.8 pfO + 0.5 pfM + 0.9 pfE$$

$$pfO + pfM + pfE = 1$$

В этом случае  $pfO = 0.0$ ,  $pfM = 0.25$ ,  $pfE = 0.75$ , т.е. олиготрофное состояние оказывается недостижимым, а большинство времени экологическая система находится в эвтрофном состоянии.

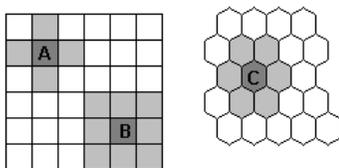
Частным, но существенным для экологических приложений, случаем конечного автомата является **клеточный автомат** (Wolfram, 1984). В понятие клеточного автомата (CA), помимо уже рассмотренных выше свойств, входит расположение автомата на плоскости и задание соседних с ним других таких же автоматов.

$$CA = \langle X, Q, L, q_1, F(q \in Q, q_n \in Q, x \in X) \rangle,$$

$L$  – множество автоматов, которые являются соседями данного автомата,  $q_n$  – состояния соседних автоматов. Таким образом, состояние клеточного автомата в последующий момент времени зависит не только от входного сигнала и состояния самого автомата, но и от состояний всех соседних автоматов.

На рис. 1.5.7 представлены некоторые варианты определения соседей в прямоугольной и гексагональных сетках. Вариант  $A$  соответствует 4-м соседним

клеткам, вариант *B* – 8-ми и вариант *C* – 6-ти соседям (Czaran, 1998; Kowalewski, Slesicka, 2001).

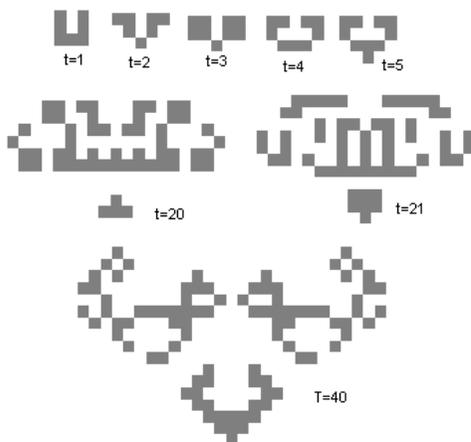


**Рис. 1.5.7.** Возможные схемы определения соседей для клеточного автомата. *A, B* – в прямоугольной сетке, *C* – в гексагональной сетке

Одна из первых моделей, которая обеспечила широкую известность клеточным автоматам, была модель «LIFE» Гарднера (программная реализация этой модели очень проста (Очков, Рахаев, 1995)). Сетка в этой модели прямоугольная, а схема соседования по варианту *B*. Моделирующий алгоритм сводится к двум правилам:

1. В пустой клетке возникает особь, если в ее окружении есть 3 другие особи.
2. Если у живой особи есть 2 или 3 живых соседа, то эта особь выживает. Если соседей меньше 2, то особь гибнет от одиночества, а если больше 3, то гибнет от перенаселения.

Модель эта замечательна тем, что при очень простом устройстве способна давать очень сложные и неожиданные пространственные структуры (рис. 1.5.8).



**Рис. 1.5.8.** Некоторые последовательные состояния одной реализации модели «LIFE»

Более сложные конструкции клеточных автоматов нашли широкое применение в области ландшафтного моделирования (Karafyllidis, Thanailakis, 1997; Balzter et al., 1998; Alonso, Sole, 2000).

## 1.6 Теория исследования операций

В главе 4 настоящей книги рассматриваются эколого-экономические модели, исследование которых базируются на теории исследования операций, поэтому имеет смысл сделать беглый обзор понятий этой теории, отсылая читателя для более серьезного изучения к специальным монографиям (Kulikowski, 1977; Вентцель, 1980; Rios, 1994; Sienkiewicz, 1994).

Под **исследованием операций** понимается применение математических, количественных методов для обоснования целенаправленной человеческой деятельности. В виду неустановившейся терминологии примерно то же самое понимается под “теорией принятия решений”, “системным анализом”, “теорией управления сложными системами” с небольшими вариациями.

**Операцией** называется всякое мероприятие (система действий) направленное на достижение какой-либо **цели**. В разделе 4.1 целью было получение максимальной прибыли от эксплуатации водохранилища, а в разделе 4.2 – это было повышение качества воды при условии минимизации затрат на постройку очистных сооружений.

Количественная конкретизация операции называется **решением**. Например, можно принять решение о постройке 10 туристических отелей на берегу водохранилища, или о модернизации очистных сооружений в Гомнице и Зелове. **Оптимальными** называется решения, которые по тем или иным признакам предпочтительнее перед другими. Собственно, вся задача исследования операций заключается в количественном обосновании оптимальных решений.

Заметим, что само принятие решения и тем более его материальная реализация выходит за рамки исследования операций и относится к компетенции лица (или группы лиц), на которых возложена ответственность за этот выбор. Делая выбор, они могут учитывать, наряду с данными вытекающими из математического расчета еще ряд соображений (например, политических), которые этим расчетом не были учтены.

Те параметры, совокупность которых образует решение, называются **элементами решения**. Например, при эксплуатации водохранилища такими элементами будут режимы включения генераторов гидростанции, постройка туристских и очистных комплексов и т.д. Обозначим множество возможных элементов решения как  $X$ . Чтобы сравнивать между собой результаты принятия различных решений, вводится **показатель (критерий) эффективности** (иногда его называют «целевой функцией»). Обозначим этот показатель как  $W$ . Тогда вся задача по исследованию операции сводится к максимизации ( $W \Rightarrow \max$ ) или минимизации ( $W \Rightarrow \min$ ) показателя эффективности. Если дело идет о прибыли,

то ее естественно максимизировать, а если о затратах или загрязнении, то их естественно минимизировать. Перейти от задачи максимизации к задаче минимизации очень просто – следует только поменять знак у величины  $W$ . Поэтому, в общем случае говорят об **оптимизации**.

Как правило, выполнение операции сопровождается действием случайных факторов («капризы погоды») в примере раздела 4.1, или колебаниями спроса и предложения на экономическом рынке, или отказы технических устройств и т.п.). В таких случаях в качестве критерия эффективности берется не сама величина, которую мы хотим оптимизировать, а ее среднее значение (математическое ожидание).

Выбор критерия эффективности задача трудная и ответственная. Неправильный выбор критерия эффективности может привести к катастрофическим последствиям. Например, если критерием эффективности постройки водохранилища будет только максимум выработанной электроэнергии, то становятся понятными все беды с развитием сине-зеленых водорослей в Киевском водохранилище или негативные последствия постройки Асуанской плотины на Ниле.

Практика **многокритериального** подхода обычно сводится к построению общего критерия в виде суммы частных критериев со своими весами и знаками (выгода со знаком плюс, а ущербы и затраты со знаком минус). Такой подход, хотя и широко распространен (Janikowski, 1993), но молчаливо предполагает, что выиграв в одном, мы можем компенсировать проигрыш в другом. Для чисто экономических задач такой подход вполне обоснован, но там, где мы имеем дело с природой, дело обстоит сложнее, например, необратимое загрязнение водоемов нельзя компенсировать никакими высокими доходами предприятий загрязнителей.

Непременным атрибутом теории исследования операций является **модель** объекта управления. Именно модель связывает решение ( $x \in X$ ) с критерием эффективности при заданном комплексе условий  $\alpha$ . Понятие функции, как отображения одного множества в другое уже рассматривалось в разделе 1.2. Здесь множества решений и условий отображаются в множество критериев эффективности  $W(\alpha, x)$ . Тогда в символической форме задача оптимизации запишется как:

$$W^* = \max_{x \in X} \{W(\alpha, x)\}$$

На математическом жаргоне приведенное выше выражение читается как: « $W^*$  есть максимальное значение  $W(\alpha, x)$ , взятое по всем решениям, входящих во множество возможных решений  $X$ ».

К сожалению, особенно в экологических приложениях, дело обстоит не так просто, как это может показаться из приведенной выше формулы. Дело в том,

что всякий результат вмешательства в природу имеет еще и такую группу факторов, которая нам заранее неизвестна  $-\xi$ . Тогда выражение для критерия эффективности будет выглядеть как:

$$W = W(\alpha, x, \xi)$$

Тогда задача из классической математической задачи поиска экстремума переходит в задачу о **выборе решения в условиях неопределенности**. Точного математического решения эта задача не имеет, а решения, так или иначе, принимать надо. Как это сделать и составляет основное содержание теории исследования операций.

Неопределенность ( $\xi$ ) бывает разная. **Стохастическая неопределенность** охватывает такие воздействия на управляемую систему, величина которых хотя заранее не известна, но известны их средние значения и функции распределения. Например, для климатических характеристик данного региона можно найти в литературе среднемесячные многолетние температуры воздуха, интенсивности солнечной радиации, количества осадков, скорости и направления ветра. В климатологических справочниках даются не только средние значения, но и функции распределения этих величин. В гидрометеорологии они называются "обеспеченностью", но это эквивалентно кумулятивной функции распределения. В случае стохастической неопределенности для критерия эффективности приходится искать среднее значение, применяя для этого, например, метод статистических испытаний (**метод Монте-Карло**, Ермаков, 1976).

Неопределенность может и не имеет стохастического характера. Например, катастрофа на атомной электростанции или разрыв магистрального нефтепровода. К этому же разряду относятся глобальные изменения климата – никакой статистики тут нет, а есть только различные сценарии с неопределенной степенью правдоподобности. Наконец, к разряду не стохастической неопределенности относится недостаток наших знаний о механизме функционирования объекта управления. В случае управления природными экологическими системами это очень существенный фактор. Задачами управления в условиях не стохастической неопределенности занимается **теория игр** (Мак-Кинси, 1969). К сожалению, основные результаты теории игр относятся к антагонистическим играм, в которых предполагается наличие противника, который всемерно противодействует принятию эффективных решений. В экологических задачах такого противника нет и ситуация попадает в раздел **игр с природой**.

Чтобы подойти к формулировке игры с природой, придется начать с общих определений теории игр. От реальной конфликтной ситуации, в теории игр рассматриваются только такие ситуации, при которых участники игры строго

придерживаются определенных **правил**. По существу, правила – это аналог модели объекта управления, которая рассматривалась выше. (Конечно, заветная мечта каждого эколога – узнать, по каким правилам играет природа!). В игре (по аналогии с шахматами, шашками и карточными играми, откуда собственно и пошла вся терминология теории игр) каждый из участников делает последовательные **ходы**. Совокупность рекомендаций и соображений как совершать те или иные ходы в зависимости от своего положения и положения противника называется **стратегией**. **Матрицей игры** называется таблица, в которой записываются выигрыши в зависимости от выбора той или иной стратегии, которую выбрали участники игры.

$$\|a_{ij}\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

где  $a_{ij}$  – выигрыш при  $i$ -й стратегии природы и  $j$ -й стратегии природопользователя,  $n$  – число стратегий природы,  $m$  – число стратегий природопользователя.

Пример такой матрицы приведен в таблице 1.6.1, причем в основу этой матрицы положены материалы исследования модели, рассмотренной в разделе 4.1 с сильными упрощениями.

**Таблица 1.6.1.** Матрица игры с природой (выигрыши даны в условных единицах)

Стратегии природопользователя	Стратегии		
	$N_1$	$N_2$	$N_3$
$M_1$	20	30	15
$M_2$	85	20	45
$M_3$	15	60	35
$M_4$	45	25	35

Рассматриваются всего три стратегии природы:  $N_1$  – жаркое лето со средним количеством осадков;  $N_2$  – холодное лето с высоким количеством осадков;  $N_3$  – средние показатели температуры и влажности. Предполагается, что в использовании природных ресурсов водохранилища можно предложить четыре стратегии:  $M_1$  – примерно одинаковые капиталовложения в области развития гидроэнергетики, туризма и рыбозахвата;  $M_2$  – приоритетное развитие туристического комплекса;  $M_3$  – приоритетное развитие гидроэнергетики, что предусматривает срабатывание уровня водохранилища, если это нужно для получения энергии;  $M_4$  – приоритетное развитие рыбного хозяйства. Предполагается, что никакими сведениями относительно того, какова будет стратегия природы, мы не располагаем.

Рассмотрим **максиминный критерий Вальда** ( $\alpha$ ). Согласно этому критерию игра с природой ведется как игра с разумным, причем агрессивным противником, делающим все для того, чтобы помешать человеку достигнуть успеха. Оптимальной считается такая стратегия, которая ориентируется на самые худшие условия. Для этого надо подсчитать минимумы по строкам и выбрать ту стратегию, при которой минимум строки максимален

$$\alpha = \max_i \min_j (a_{ij}) .$$

**Таблица 1.6.2.** Матрица игры с природой. Расчет критерия Вальда

Стратегии природопользователя	Стратегии природы			min
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	
$M_1$	20	30	15	15
$M_2$	85	20	45	20
$M_3$	15	60	35	15
$M_4$	45	25	35	25

Как следует из табл. 1.6.2, по критерию Вальда оптимальной стратегией будет развитие рыбного хозяйства.

**Риском** при использовании стратегии  $M_j$  при стратегии природы  $N_i$  называется разность между выигрышем, который можно получить, если точно знать стратегию природы, и тем, который будет получен в случае ее незнания. Для примера, приведенного в таблице 1.6.1. Например, если природа выберет стратегию  $N_1$  (жаркое лето), то при выборе развития туризма риск равен нулю, а вот при ставке на развитие гидроэнергетики риск максимален. **Критерий минимаксного риска Сэвиджа** ( $S$ ) советует при выборе оптимальной стратегии ориентироваться на минимальный риск при наихудших условиях.

$$S = \min_i \max_j (r_{ij})$$

где – риск при  $i$ -й стратегии природы и  $j$ -й стратегии природопользователя.

Как следует из табл. 1.6.3, по критерию Сэвиджа следует развивать туризм или рыбное хозяйство.

**Таблица 1.6.3.** Матрица рисков для условий матрицы выигрышей

Расчет критерия Сэвиджа

Стратегии природопользователя	Стратегии природы			max
	$N_1$	$N_2$	$N_3$	
$M_1$	65	30	45	65
$M_2$	0	40	0	40
$M_3$	70	0	10	70
$M_4$	40	35	10	40

**Критерий пессимизма-оптимизма** Гурвица (H) рекомендует при выборе решения руководствоваться ни крайним пессимизмом (“всегда рассчитывай на худшее!”), ни крайним легкомысленным оптимизмом (“авось, повезет!”), выбирать нечто среднее:

$$H = \max_j \{ \sigma \min_i (a_{ij}) + (1 - \sigma) \max_i (a_{ij}) \}$$

где  $\sigma$  – коэффициент пессимизма, выбираемый между нулем и единицей. При  $\sigma=1$  критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, а при  $\sigma=0$  в критерий «крайнего оптимизма», рекомендуемый выбирать ту стратегию, при которой выигрыш в данной строке максимален.

**Таблица 1.6.4.** Матрица игры с природой.

Расчет критерия Гурвица при коэффициенте пессимизма  $\sigma = 0.4$

Стратегии природопользователя	Стратегии природы			min	max	H
	$N_1$	$N_2$	$N_3$			
$M_1$	20	30	15	15	30	24
$M_2$	85	20	45	20	85	59
$M_3$	15	60	35	15	60	42
$M_4$	45	25	35	25	45	37

Применительно к численным данным рассматриваемого примера критерий Гурвица рассчитан в таблице 1.6.4. При коэффициенте пессимизма 0.4 этот критерий рекомендует развивать туризм. Только при коэффициенте пессимизма 0.9 критерий Гурвица начнет рекомендовать переключиться с туризма на рыбное хозяйство.

Читателя не должен смущать тот факт, что различные критерии дают разные рекомендации (численный пример сознательно подобран таким образом) – ведь в конструкции каждого критерия лежат разные предпосылки. Поэтому повторяем еще раз – теория исследования операций и, особенно, теория принятия решения в условиях неопределенности призваны только помочь лицу, принимающему решение, в его деле, а последнее слово всегда остается за человеком, который несет за него ответственность.

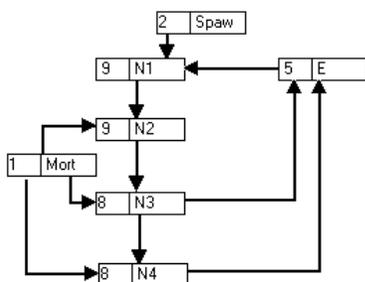
## 2. Модели популяций

### 2.1 Простейшая модель популяции рыб

В качестве примера применения техники моделирования при помощи аппарата конечных автоматов выберем популяцию рыб – объект многократно и тщательно изученный не только в природе, но и посредством построения моделей основанных на применении дифференциальных и конечно-разностных моделей (Ricker, 1954; Biverton, Holt, 1957). Были и эпизодические применения автоматов для моделирования популяций рыб (Меншуткин, 1967а).

Блок-схема моделируемой популяции рыб представлена на рис. 2.1.1 и представляет собой композицию из пяти детерминированных конечных автоматов. Автоматы  $N1$ ,  $N2$ ,  $N3$  и  $N4$  представляют численности возрастных групп, а автомат  $E$  – численность нерестового стада, которое формируется из особей двух старших возрастных групп популяции. Численности рыб оцениваются по девятибалльной шкале: 1 – крайне мало, 2 – очень мало, 3 – мало, 4 – ниже среднего, 5 – средне, 6 – выше среднего, 7 – много, 8 – очень много, 9 – крайне много.

Внешние воздействия на систему представлены естественной смертностью ( $Mort$ ) и емкостью нерестилищ ( $Spaw$ ), которые оцениваются в той же шкале, что и численности возрастных групп.



**Рис. 2.1.1** Блок-схема популяции рыб, состоящей из четырех возрастных групп

Функция выходов автомата первой возрастной группы рыб представлена в виде матрицы  $N1(E, Spaw)$ , столбцы которой соответствуют численности нерестового стада ( $E$ ), а строки – емкости нерестилищ ( $Spaw$ ). При низких емкостях нерестилищ автомат имитирует форму репродукционной кривой Риккера, а при высоких – Бивертонга и Холта.

$$N1(E, Spaw) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 & 8 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 7 & 8 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Автомат  $E$  имитирует формирование нерестового стада из особей старших возрастных групп популяции, причем в конструкции матрицы  $E(N3, N4)$  учитывается эффект увеличения плодовитости рыб с возрастом.

$$E(N3, N4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 7 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Переход из одной возрастной группы в следующую, и влияние естественной смертности учитывается при построении матриц  $N2(N1, Mort)$ ,  $N3(N1, Mort)$  и  $N4(N1, Mort)$ . Поскольку эти матрицы имеет сходный вид, приводится только последняя:

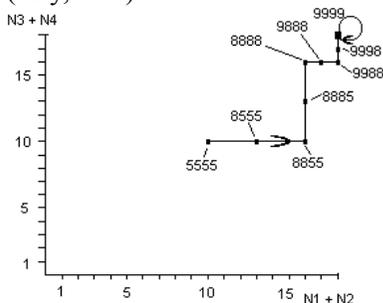
$$N4(N3, Mort) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку состояние популяции описывается точкой в четырехмерном пространстве, что не удобно для графического изображения, то целесообразно изображать функционирование модели во времени на фазовой диаграмме, по осям которой откладываются величины  $N1+N2$  и  $N3+N4$ . Хотя такое отображение и не является однозначным, но наглядным, поскольку характеризует соотношение неполовозрелой и половозрелой частей популяции.

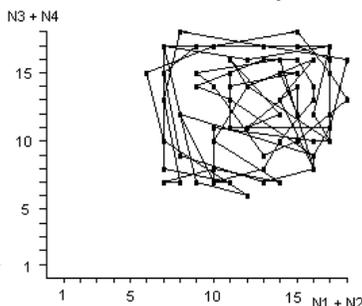
На рис. 2.1.2 представлена фазовая диаграмма перехода популяции из начального состояния 5555 в конечное устойчивое состояние 9999 при минимальной естественной смертности ( $Mort = 1$ ) и максимальной емкости нерестилиц ( $Spaw = 9$ ). Этот результат согласуется с классической теорией динамики популяций рыб (Biverton, Holt, 1957).

Другой крайний случай представлен на рис. 2.1.3. Ограниченная емкость нерестилиц ( $Spaw = 9$ ) ведет к возникновению хаотической динамики популяции, как это было показано на примерах моделей лососевых рыб (Ricker, 1958). Поскольку рассматриваемая модель – конечный автомат, настоящего хаоса не получилось, а генерируется периодическая последовательность длиной

в 75 временных шагов, по внешнему виду очень похожая на хаотический «странный аттрактор» (May, 1976).

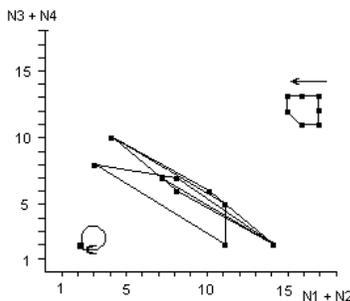


**Рис. 2.1.2.** Фазовая диаграмма динамики популяции при  $Spaw=9$  и  $Mort=1$  из начального состояния 5555 в конечное устойчивое состояние 9999

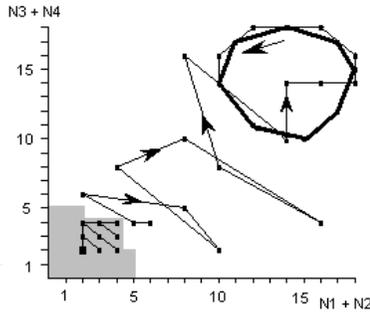


**Рис. 2.1.3.** Фазовая диаграмма динамики популяции при  $Spaw=1$  и  $Mort=1$  из начального состояния 5555. Цикл имеет периодичность в 75 временных шагов

При промежуточных значениях параметров (рис. 2.1.4 и рис. 2.1.5) возможно возникновение устойчивых периодических колебаний с более короткими циклами (например, в 7 и 9 лет (рис. 2.1.4)), что действительно отмечалось в природных популяциях.



**Рис. 2.1.4.** Фазовая диаграмма динамики популяции при  $Spaw=2$  и  $Mort=2$  из всех возможных начальных состояний. Показано только устойчивое состояние (1111) и два устойчивых цикла с периодами 7 и 9 временных шагов



**Рис. 2.1.5.** Фазовая диаграмма динамики популяции при  $\text{Spaw} = 2$  и  $\text{Mort} = 1$ . Показан выход системы на устойчивый цикл из начального состояния 3322. Серым цветом отмечена та область фазовой диаграммы, из которой система приходит к устойчивому состоянию 1111

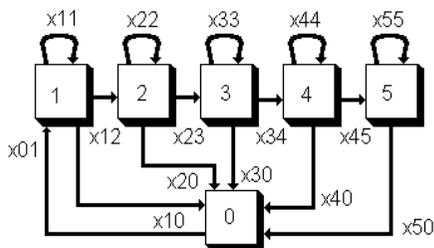
Смысл настоящего раздела заключается вовсе не в том, чтобы получить какие-то новые содержательные результаты в области теории динамики популяций рыб, а в том, чтобы продемонстрировать тот факт, что модель популяции рыб, созданная при помощи композиции конечных автоматов, способна воспроизводить все те эффекты, которые были получены при помощи классических моделей аналогичной структуры. На рассматриваемом в настоящем разделе уровне сложности применение технологии автоматного моделирования не дает каких-либо ощутимых преимуществ перед классическими моделями, разве что отсутствие алгебраических формул и символов дифференциального исчисления, которые всегда вызывают недоверие у большинства профессиональных ихтиологов. Однако, по мере увеличения сложности моделей, как это будет показано в дальнейшем изложении, достоинства автоматного подхода будут более явными.

## 2.2 Модель популяции с представлением особи как конечного автомата

Настоящий раздел основан на интерпретации каждой особи в составе популяции в качестве конечного автомата. Конкретным прототипом рассматриваемой модели послужила популяция планктонных ракообразных *Eudiatomus gracilis* Sars, обитающих в водохранилище Солина на реке Сан (Юго-Восточная часть Польши).

Экология копепод, в частности *Eudiatomus gracilis*, изучена достаточно подробно (Weglenska, 1968; Монаков, 1976; Иванова, 1985) и существует модель популяции этого вида, входящего в зоопланктонное сообщество центральной части Ладожского озера (Казанцева, Смирнова, 1996), которая выполнена с использованием традиционной схемы балансовых уравнений.

В своем развитии особь *Eudiptomus gracilis* проходит стадии яйца, науплиуса, пять копепоидитных стадий и взрослого половозрелого состояния. Объединяя первые три копепоидитные стадии в одно состояние, а последующие две в другое, получаем схему развития особи, изображенную на рис. 2.2.1.



**Рис. 2.2.1.** Графоид автомата имитирующего особь копепоиды  
 0 – особь не существует, 1 – яйцо, 2 – науплиус, 3 –копепоидит I-III стадии развития, 4 – копепоидит IV-V стадии развития, 5 – взрослая особь. Входы: x01 – откладка яйца, x10, x20, x30, x40, x50 – гибель яйца, копепоидита и взрослой особи, x12 – переход от яйца к науплиусу, x23 – переход от науплиуса к копепоидиту I-III, x34 – переход от копепоидита I-III к копепоидиту IV-V, x45 – переход от копепоидита IV-V к взрослой особи, x11, x22, x33, x44, x55 – особь остается на прежней стадии развития

К перечисленным выше состояниям автомата добавлено еще нулевое состояние, интерпретируемое как отсутствие особи. Переход автомата в это состояние соответствует событию гибели особи, а переход из нулевого состояния в состояние 1 (яйцо) следует понимать как факт рождения новой особи.

Матрица соединений для данного автомата имеет вид:

$$\text{Cop}(q, q) = \begin{pmatrix} 0 & x01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x10 & x11 & x12 & 0 & 0 & 0 \\ x20 & 0 & x22 & x23 & 0 & 0 \\ x30 & 0 & 0 & x33 & x34 & 0 \\ x40 & 0 & 0 & 0 & x44 & x45 \\ x50 & 0 & 0 & 0 & 0 & x55 \end{pmatrix}$$

Вся дальнейшая работа по созданию модели популяции *Eudiptomus gracilis* сводится к нахождению зависимости входов x10, x20, x30, x40, x50, которые в экологии принято связывать с коэффициентами смертности, x11 – x55, связанные с функцией индивидуального роста, и x01, который может быть интерпретирован как коэффициент размножения, от состояния данной особи, состояний всех других особей популяции, а также от внешних воздействий на популяцию (температура воды, плотность кормовых объектов и действие хищников-планктонофагов).

Переход особи диаптомуса из одной стадии развития ( $j$ ) в следующую ( $j+1$ ), т.е. реализация входов  $x_{12}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{34}$  или  $x_{45}$  для данной особи, осуществлялся тогда, когда число суток, проведенных особью в данной стадии (ST) становилось равным  $D(j)$ . Взрослая особь, которая провела в последней стадии максимальное количество суток, считалась погибшей (вход  $x_{50}$ ). В противном случае реализовались входы  $x_{11}$ ,  $x_{22}$ ,  $x_{33}$ ,  $x_{44}$  или  $x_{55}$ , т.е. особь оставалась в той же стадии развития.

Продолжительность развития диаптомусов в каждой стадии развития ( $j$ ) определялась по соотношению:

$$D(j) = D_0(j) \times IVLEVA(Tem),$$

где:  $D_0(j)$  – продолжительность развития при 200 С,  $IVLEVA(Tem)$  – температурная поправка (Ивлева, 1981),  $Tem$  – температура воды.

$$IVLEVA(Tem) = 1 / (1.084^{(Tem-20)})$$

Теперь перейдем к определению трофических характеристик особи и всей популяции, которые необходимы для вычисления входов  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$  и  $x_{40}$ .

Траты на обмен каждой особью за сутки вычисляются по формуле:

$$R = (4.86 \times 24 \times \alpha \times W^{beta}) / (cal \times IVLEVA(Tem)),$$

где 4.86 – оксикалорийный коэффициент, 24 – число часов в сутках,  $\alpha$  и  $\beta$  – эмпирические коэффициенты (Балушкина, Винберг, 1978),  $cal=600$  кал/г – калорийность сырой биомассы зоопланктона,  $IVLEVA(Tem)$  – температурная поправка (Ивлева, 1981),  $Tem$  – температура воды.

$$VLEVA(Tem) = 1 / (1.084^{(Tem-20)}).$$

Продолжительность развития диаптомусов в каждой стадии развития ( $j$ ) определялась по соотношению:

$$D(j) = D_0(j) \times IVLEVA(Tem),$$

где  $D_0(j)$  – продолжительность развития при 20° С.

Пищевые потребности особи вычисляются как:

$$C(j) = (1/U) \times ((W(j+1) - W(j)) / D(j) + R),$$

где  $U$  – коэффициент усвоения пищи,  $W(j)$  – масса тела особи диаптомуса, находящегося в  $j$ -й стадии развития. Для взрослых особей за величину  $W(j+1)$  – принимался дефинитивная масса, т.е. предельное значение массы диаптомуса.

В модели предполагалось, что науплиусы и диаптомусы, находящиеся в младших копепоидитных стадиях, могут питаться фитопланктоном, бактериопланктоном, простейшими, детритом и мелкими коловратками. Особи старших копепоидитных стадий и взрослые особи способны к каннибализму, т.е. поеданию науплиусов и младших копепоидитов. Доля животной пищи у этих особей определялась параметром  $Can$ . Отсутствие каннибализма соответствовало случаю

$C_{an} = 0$ . Считалось, что рыбы-планктофаги (молодь рыб и уклея в водохранилище Солина) могут питаться только взрослыми особями диаптомусов и копеподами старших стадий.

Напряженность трофических отношений между фитопланктоном и его потребителями (EPF), между жертвами каннибализма и каннибалами (EFC), между диаптомусами и рыбами (ECFish) вычисляется как:

$$EPF = \text{ConsF}/\text{BiomassPhy},$$

$$EFC = \text{ConsC}/\text{BiomassF},$$

$$ECFish = \text{ConsFish}/\text{BiomassC},$$

где ConsF – суммарные пищевые потребности фильтраторов, ConsC – суммарные пищевые потребности каннибалов, ECFish – суммарные пищевые потребности рыб-планктофагов, BiomassPhy – биомасса кормовых объектов диаптомусов-фильтраторов, BiomassF – биомасса кормовых объектов хищных диаптомусов, BiomassC – биомасса кормовых объектов рыб-планктофагов.

Смертность диаптомусов от выедания рыбами (MortC1) вычисляется по соотношениям В.С. Ивлева (1955):

$$\text{MortC1} = \text{MortCmax} \times (1 - \exp(-KC \times \text{ECFish})),$$

где KC – эмпирический коэффициент, MortCmax – максимально возможное выедание диаптомусов рыбами за сутки. По аналогичному соотношению вычисляется и смертность науплиусов и младших копеподитов от воздействия хищных диаптомусов (MortF1). При очень высоком трофическом напряжении, когда потребности в пище значительно превышают наличное количество корма, появляется вероятность гибели диаптомусов от недостатка корма (MortF2).

$$\text{MortF2} = (\text{deltaCritF} - \text{deltaF}) / \text{deltaF},$$

где  $\text{deltaF} = (\text{BiomassPhy} \times \text{MortPhy}) / \text{ConsF}$  – степень удовлетворения пищевых потребностей, а  $\text{deltaCritF}$  – критическая степень удовлетворения пищевых потребностей, при переходе через которую начинается гибель от голодания. Результирующая смертность от воздействия каннибалов и недостатка корма для младших групп диаптомусов или воздействия рыб для старших возрастных групп диаптомусов (MortF) определяется по соотношению:

$$\text{MortF} = 1 - (1 - \text{MortF1}) \times (1 - \text{MortF2}),$$

поскольку предполагается, что гибель особи диаптомуса от хищников и гибель особи диаптомуса от голодания – явления несовместимые. Событие гибели особи (вход  $x_{10}$ ,  $x_{20}$ ,  $x_{30}$ ,  $x_{40}$  в зависимости от состояния особи) разыгрывается при помощи сравнения вероятности гибели с равномерно распределенным в диапазоне от 0 до 1 псевдослучайным числом (RND).

В настоящей модели предполагалось, что в популяции диаптомуса поддерживается постоянное соотношение полов и можно пользоваться приведенной плодовитостью (*fert*), рассчитанную не на одну самку, а на одну половозрелую особь. Из-за отсутствия данных непосредственных измерений величины приведенных плодовитостей заимствованы из работы по зоопланктону Ладожского озера, где обитает *Eudiatomus gracilis* (Казанцева, Смирнова, 1996). Каждая взрослая особь могла породить *fert* новых особей на стадии яйца, что в модели интерпретировалось как переход для *fert* автоматов, находящихся в состоянии 0 в состояние 1.

При исследовании модели за основной вариант принимался именно тот, который был завершающим в процессе калибровки модели и динамика биомассы популяции при котором изображена на рис. 2.2.2. Увеличение пресса рыб – планктофагов в два раза по сравнению с основным вариантом (табл. 2.2.1) приводит к снижению годовой продукции популяции *Eudiatomus gracilis*, причем коэффициент *P/V* при этом возрастает. Снижение интенсивности выедания диаптомусов рыбами приводит к обратному эффекту (вариант 3 в табл. 2.2.1, рис. 2.2.4). Подобная реакция исследуемой популяции на изменение пресса хищников связана с тем, что рыбы, выедавая взрослых особей, существенно снижают интенсивность каннибализма и повышают, тем самым, темп продукционного процесса, что проявляется в росте коэффициента *P/V*.

Увеличение кормовой базы диаптомусов приводит к увеличению продукции популяции (вариант 4, табл. 2.2.1), но коэффициент *P/V*, в отличие от случая с изменением пресса рыб, изменяется незначительно относительно базового варианта. При очень низких значениях величины кормовой базы на динамику популяции диаптомусов начинает влиять эффект повышения вероятности гибели особей при недостатке пищи, что ведет к снижению интенсивности процесса продуцирования.

Повышение температуры воды сказывается, в первую очередь, на сокращении времени пребывания диаптомусов в стадиях развития и ускорении темпа роста (вариант 6, табл. 2.2.1, рис. 2.2.3), что приводит к увеличению продукции, средней биомассы и коэффициента *P/V*. Снижение температуры воды приводит к противоположному изменению продукционных свойств популяции.

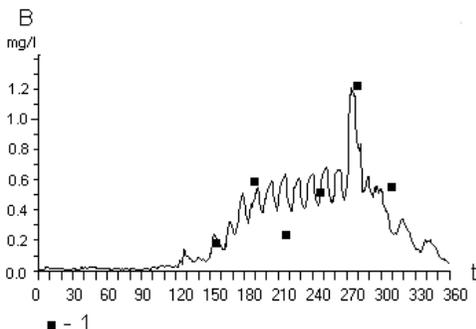
Увеличение коэффициента усвоения пищи (*U*) стимулирует увеличение продукции и биомассы популяции диаптомусы (вариант 8, табл. 2.2.1) при некотором снижении коэффициента *P/V*. При ухудшении усвоения пищи (вариант 9, табл. 2.2.1) продукция и биомасса сокращаются по сравнению с основным вариантом, а эффективность продукционного процесса несколько возрастает, т.к.

падение биомассы происходит в этих условиях более интенсивно, чем сокращение продукции.

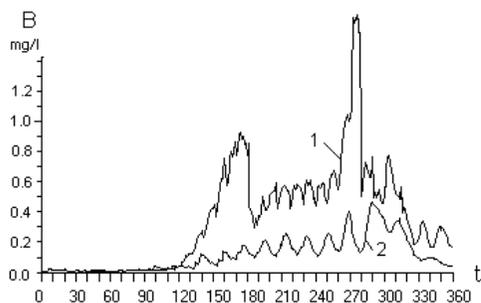
**Таблица 2.2.1.** Результаты исследования модели популяции *Eudiaptomus gracilis*

		Продукция (ккал м <sup>-2</sup> год <sup>-1</sup> )	Средняя биомасса (ккал м <sup>-2</sup> )	Коэффициент Р/В (год <sup>-1</sup> )
1	Основной вариант	196.6	11.4	17.3
2	Увеличение пресса рыб в 2 раза	165.1	9.2	18.0
3	Снижение пресса рыб в 2 раза	222.6	14.7	15.1
4	Увеличение кормовой базы в 2 раза	276.8	16.1	17.2
5	Снижение кормовой базы в 2 раза	94.8	5.9	16.2
6	Увеличение температуры воды на 2 градуса	240.0	13.2	18.1
7	Снижение температуры воды на 2 градуса	89.9	6.1	14.2
8	Увеличение коэффициента усвоения пищи до 0.9	220.3	12.9	17.1
9	Снижение коэффициента усвоения пищи до 0.7	185.2	10.5	17.7
10	Снижение степени каннибализма в 2 раза	244.3	15.9	15.3
11	Ужесточение степени каннибализма в 2 раза	116.2	6.4	18.4

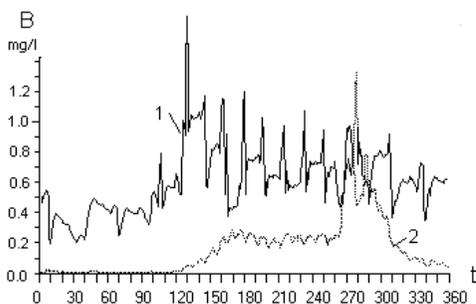
Степень каннибализма в популяции диаптомусов существенно сказывается на продукционных свойствах популяции (варианты 10 и 11, табл. 2.2.1). Снижение каннибализма до незначительных размеров приводит к существенному росту продукции и средней биомассы популяции при резком сокращении коэффициента Р/В. Ужесточение каннибализма ведет к повышению интенсивности продукционного процесса при снижении абсолютных значений величин биомассы и продукции. К сожалению, никакими экспериментальными данными о каннибализме диаптомусов в водохранилище Солина мы не располагаем, и проверить реальность полученных данных не представляется возможным.



**Рис. 2.2.2.** Динамика биомассы популяции *Eudiaptomus gracilis* в водохранилище Солина. 1 – результаты измерений в 1999 году возле плотины. По оси абсцисс – время в сутках с начала года, по оси ординат – биомасса в мг/л



**Рис. 2.2.3.** Динамика биомассы популяции *Eudiaptomus gracilis* в водохранилище Солина. 1 – средняя температура воды повышена на 2° по сравнению с 1999 годом, 2 – средняя температура воды понижена на 2° по сравнению с 1999 годом. По оси абсцисс – время в сутках с начала года, по оси ординат – биомасса в мг/л



**Рис. 2.2.4.** Динамика биомассы популяции *Eudiaptomus gracilis* в водохранилище Солина. 1 – воздействие планктофагов снижено в 2 раза по сравнению с 1999 годом, 2 – воздействие планктофагов повышено в 2 раза по сравнению с 1999 годом. По оси абсцисс – время в сутках с начала года, по оси ординат – биомасса в мг/л

Обсуждая гидробиологические результаты проведенного моделирования, сравним данные, полученные для популяции диаптомусов в водохранилище Солина с результатами вычислений по эмпирическим соотношениям А.Ф. Алимова (2000), полученным в результате обобщения по многим озерам и водохранилищам Восточной Европы (в том числе и Польши). Биомасса зоопланктона по формуле  $B_{zoo} = 0.701 * Pp^{0.3}$  (где  $Pp$  – величина первичной продукции) оценивается для условий Солины в 5-6 г на квадратный метр поверхности водоема, что близко, но немного ниже, чем получено для Солины по измерениям Т. Пулторака (личное сообщение). Расхождение объясняется тем, что в обобщении А.Ф. Алимова фигурируют водоемы расположенные, как правило, значительно севернее, чем Солина.

Продукция популяции копеподы *Epishura baicalensis*, которая занимает в озере Байкал ту же экологическую нишу, что и *Eudiaptomus gracilis* в Солине

(Грезе, 1967) составляет  $270 \text{ г м}^{-2} \text{ год}^{-1}$ , что сопоставимо с вычисленной в настоящей работе продукции *Eudiptomus gracilis* ( $326 \text{ г м}^{-2} \text{ год}^{-1}$  при калорийности  $0.6 \text{ ккал г}^{-1}$ ). В эвтрофном озере Балатон продукция *Eudiptomus gracilis* превосходит  $1000 \text{ г м}^{-2} \text{ год}^{-1}$  (Ponyi et al., 1982).

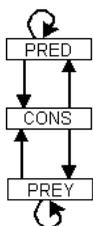
Методический результат настоящего раздела заключается в том, что при использовании индивидуального подхода к моделированию популяции (Uchmanski, Grimm, 1996) представление особи в виде конечного автомата делает модель и особенно ее программную реализацию более компактной и универсальной, чем при использовании обычных уравнений роста, смертности и размножения животных.

### 2.3 Модель системы «хищник – жертва»

Моделирование системы «хищник-жертва» является излюбленным объектом классической математической экологии, начиная с работ Вито Вольтерра (Volterra, 1931) и кончая более поздними исследованиями (Uchmański, 1992). Литература по моделям этого типа очень велика, но во всех случаях исследовалась система дифференциальных уравнения с различными вариантами описания процесса поедания хищниками жертв и размножения тех и других. Основной результат всех этих работ заключается в установлении возможности возникновения в системе незатухающих периодических колебаний (в простейшем случае синусоидальных) и наличия при определенных условиях стационарных точек. Цель настоящего раздела в том, чтобы показать, что простейшая модель системы «хищник-жертва», созданная при помощи композиции конечных автоматов, способна к воспроизведению таких же эффектов.

Предлагаемая модель системы «хищник-жертва» состоит всего из трех автоматов: популяции хищника (PRED), популяции жертвы (PREY) и связующего их звена – потребление жертв хищниками (CONS). Схема композиции автоматов изображена на рис. 2.3.1. Заметим, что для простоты рассматривается автономная система, т.е. изменения внешних воздействий на нее (например, колебания кормовой базы жертв или температуры среды) не учитываются.

Оценка пищевых рационов хищников в моделях Вольтерра описывалась как произведение численности хищников на численность жертв с некоторым коэффициентом. Экологически гораздо более реалистично, и главное подтвержденным многочисленными экспериментами с животными от низших ракообразных до рыб и насекомых, является соотношение, полученное В.С. Ивливым (1955) в виде экспоненты с отрицательным показателем степени.



**Рис. 2.3.1** Схема композиции автоматов в модели системы «хищник – жертва». *PRED* – популяция хищников, *CONS* – потребление жертв хищниками, *PREY* – популяция жертв

Идея ограниченности максимального рациона хищника перенесена в конструкцию матрицы автомата *CONS*, которая представляет собой интерпретацию функции минимума.

$$CONS(PREY, PRED) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

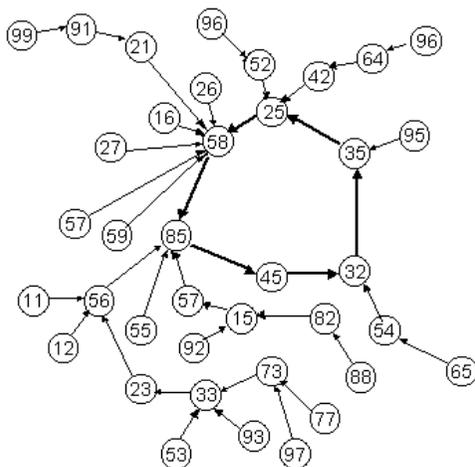
Автомат *PRED* должен функционировать таким образом, чтобы при высоких кормовых рационах хищников их численность сохранялась и даже возрастала, а при низких сокращалась. Эти свойства отражены в матрице *PRED(PRED, CONS)*. Например,  $PRED(2, 9) = 9$ , т.е. при низкой исходной численности ( $PRED=2$ ) и очень хороших условиях питания ( $CONS = 9$ ) хищники быстро могут поднять свою численность до максимальной. Наоборот, плохие условия питания сокращают численность хищников ( $PRED(9, 2) = 2$ ).

$$PRED(PRED, CONS) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 9 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$

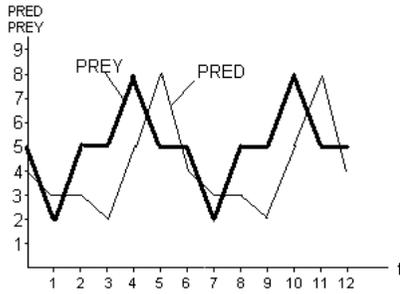
Автомат *PREY* реагирует на изменение суммарного рациона хищников так, что при малом давлении хищников жертвы имеют возможность быстро размножиться (например,  $PREY(2,2)=6$ ), но при сильном воздействии хищников гибнут, даже при высокой начальной численности (например,  $PRE(8,8)=2$ ).

$$PREY(PREY, CONS) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 & 9 & 9 \\ 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

При данной конструкции матриц  $CONS(PREY, PRED)$ ,  $PREY(PREY, CONS)$  и  $PRED(PRED, CONS)$  модель из любого начального состояния (заметим, что таких состояний 81) выходит на устойчивый цикл, как это показано на рис. 2.3.2. От состояний с преобладанием жертв (35, 25, 58) система переходит к состояниям с преобладанием хищников (85, 45 и 32), а затем цикл повторяется снова. Привычное по учебникам экологии изображение этого процесса во временных координатах приведено на рис. 2.3.3.



**Рис. 2.3.2.** Граф переходов системы «хищник – жертва» при первом варианте матрицы *PREY*. Устойчивый цикл обозначен толстыми стрелками. В кружках обозначены состояния системы, причем первое число – состояние популяции хищника, а второе – жертвы



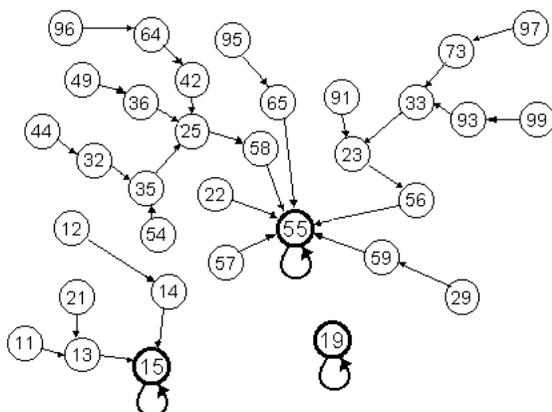
**Рис. 2.3.3.** Динамика системы «хищник-жертва» во временных координатах ( $t$ )

В рассмотренном выше варианте системы «хищник-жертва» и хищники и жертвы резко реагировали на недостаток корма или на выедание. Если предположить наличие у жертв убежищ или каких-либо защитных приспособлений, как это обычно бывает в природе, то матрицу  $PREY(PREY, CONS)$  можно записать в таком, например, виде:

$$PREY(PREY, CONS) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

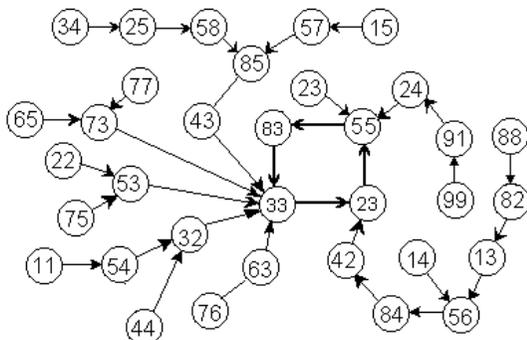
В общем, небольшие изменения в матрице  $PREY(PREY, CONS)$  приводят к качественно иной картине динамики всей системы – вместо устойчивого цикла она получает несколько устойчивых состояний. Из большинства начальных состояний система (иногда после относительно сложного переходного процесса) приходит в состояние 55. Если хищников изначально было крайне мало, то они оказываются не в состоянии поднять свою численность в условиях повышенной сопротивляемости жертв – так получаются устойчивые состояния 15 или 19 (рис. 2.3.4).

Возможно промежуточное состояние между двумя рассмотренными выше – продолжительность цикла сокращается с 6 до 4 временных шагов, но устойчивые состояния еще отсутствуют (рис. 2.3.5).



**Рис. 2.3.4.** Граф переходов системы «хищник – жертва» при втором варианте матрицы *PREY*. Устойчивые состояния обозначены толстыми кружками.

В кружках обозначены состояния системы, причем первое число – состояние популяции хищника, а второе – жертвы



**Рис. 2.3.5.** Граф переходов системы «хищник – жертва» при третьем варианте матрицы *PREY*. Устойчивый цикл обозначен толстыми стрелками.

В кружках обозначены состояния системы, причем первое число – состояние популяции хищника, а второе – жертвы

Имеется возможность усложнить рассматриваемую систему путем введения возрастной структуры в популяции хищника (хищник обычно на ранних стадиях своего развития хищником не является) и жертвы (под действие хищника попадают, обычно, не все жертвы, а только определенного размера – у взрослых особей могут развиваться средства защиты, или, наоборот, на ранних стадиях развития жертвы слишком малы, чтобы стать добычей хищников). Но для целей, поставленных в начале раздела – показать применимость аппарата конечных автоматов к описанию динамики системы «хищник-жертва» рассмотренный пример можно считать достаточным.

## 3 Модели экологических систем

### 3.1 Модель простейшей водной экосистемы

В настоящем разделе разбирается обобщенная модель экологической системы озера или водохранилища без излишней конкретизации. Делается это для того, чтобы создать основу для создания моделей реальных природных систем. В лимнологии (особенно для водоемов умеренного климата) уже выработался достаточно устойчивый набор представлений, проверенных на практике, который позволяет подойти к построению подобной модели (Kajak, 1998). Как уже говорилось во введении, язык балансовых дифференциальных уравнений для этого оказался малоподходящим хотя бы потому что, величины продукций отдельных звеньев водной экосистемы отличаются на несколько порядков. Например, продукция рыб составляет доли процента от первичной продукции (Бульон, Винберг, 1981), это означает, что некоторые важные компоненты экосистемы характеризуются величинами, которые заведомо ниже, чем ошибки измерения других величин. Именно по этой причине в балансовые модели водных экосистем почти никогда не включаются элементы ихтиофауны и литорали, которые функционально играют существенную роль в динамике всей системы, при незначительности вклада в энергетический баланс водоема. Техника моделирования при помощи конечных автоматов позволяет обойти это ограничение, правда ценой отказа от прямого использования закона сохранения вещества и энергии.

Предлагаемая модель имеет три основных блока – пелагиаль, бенталь и литораль, согласно классическим лимнологическим представлениям. На рис. 3.1.1. представлена схема композиции автоматов, формирующей пелагическую ячейку водной экосистемы. Как и в разделе 2.1.1 принята девятибальная схема оценки всех переменных. Переменными, определяющими состояние результирующего автомата, являются: биомасса фитопланктона ( $A$ ), биомасса зоопланктона ( $Z$ ), биомасса бактериопланктона ( $B$ ), концентрация растворенного в воде кислород ( $OX$ ), концентрация мертвого органического вещества – детрита ( $D$ ), концентрация минерального азота ( $N$ ), концентрация минерального фосфора ( $P$ ).



$$Abio(P, N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \end{vmatrix}$$

При переходе фитопланктона в следующее состояние приходится учитывать выедание (фильтрацию) его зоопланктоном, что отражено в конструкции матрицы  $A1(Aprod, Z)$ .

$$A1(Aprod, Z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Привести все 17 матриц, описывающих переход пелагической ячейки в новое состояние, было бы слишком громоздким, поэтому ограничимся лишь характерными примерами. Изменение запасов минерального азота в воде определяется регенерацией его в результате деятельности бактериопланктона ( $B$ ) и потребления фитопланктоном на образование первичной продукции ( $Aprod$ ), что описывается матрицей  $Na(Aprod, B)$ .

$$Na(Aprod, B) = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 7 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 6 & 5 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Например, при низкой первичной продукции ( $Aprod=2$ ) высокой активности бактериопланктона ( $B=8$ )  $Na(2,8)=8$ , т.е. баланс минерального азота будет положителен и выше среднего (такие условия могут складываться в водоеме в зимний период). Наоборот, при высокой первичной продукции ( $Aprod=8$ ) средней активности бактериопланктона ( $B=5$ )  $Na(8,5)=6$ , т.е. баланс минерального азота будет лишь немного выше среднего (такие условия могут складываться в водоеме в летний период).

В аналогичном стиле описан процесс формирования фосфорного баланса (матрица  $Pa(Aprod, B)$ ). Моделирование динамики зоопланктона включает в себя определение его пищевых потребностей (матрица  $Zcon(A, D)$ ) с учетом влияния температуры воды на интенсивность метаболизма зоопланктонных ракообразных (матрица  $Ztem(Zcon, T)$ ). Рост зоопланктона полагается зависящим не только от кормовых условий, но и концентрации растворенного в воде кислорода, при низких концентрациях развитие зоопланктона существенно замедляется (матрица  $Zgro(Ztem, OX)$ ). Завершается моделирование зоопланктона переходом его в новое состояние (матрица  $Zl(Z, Zgro)$ ).

Кислородный режим моделируется на основе определения расходов на дыхание животных (матрица  $Resp(Z, B)$ ) и оценки соотношения расхода кислорода на дыхание и его выделение в процессе фотосинтеза (матрица  $Oxbal(Aprod, Resp)$ ). Новое состояние переменной, характеризующей концентрацию растворенного в воде кислорода, определяется при помощи матрицы  $OX1(OX, Oxbal)$ .

Количество отмирающего органического вещества оценивается при помощи матрицы  $Dmort(A, Z)$ , а определение нового состояния системы по детриту при помощи матрицы  $D1(D, Dmort)$ . Активность бактериопланктона оценивается по температуре воды ( $T$ ) и количеству мертвого органического вещества ( $D$ ) при помощи матрицы  $B1(D, T)$ .

Композиция автоматов в бентосной ячейке представлена на рис. 3.1.2.

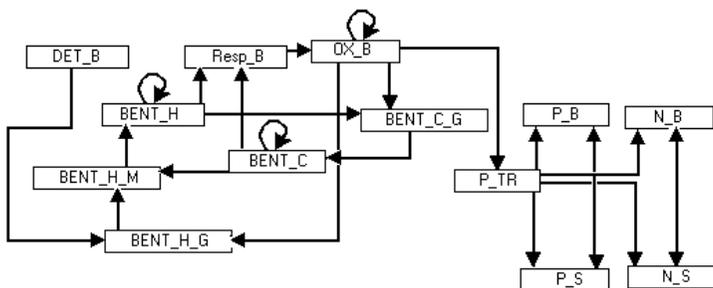


Рис. 3.1.2. Схема композиции автоматов в бентосной ячейке водной экосистемы

Обозначения на рис. 3.1.2:  $DET\_B$  – детрит, поступающий на дно водоема,  $BENT\_H$  – нехищный бентос,  $BENT\_C$  – хищный бентос,  $BENT\_H\_G$  – рост нехищного бентоса,  $BENT\_H\_M$  – смертность нехищного бентоса,  $BENT\_C\_G$  – рост хищного бентоса,  $OX\_B$  – концентрация растворенного кислорода в придонном слое,  $PTR$  – условия транспорта биогенов в придонном слое,  $P\_B$  – минеральный фосфор в придонном слое воды,  $P\_S$  – минеральный фосфор в донных отложениях,  $N\_B$  – минеральный азот в придонном слое воды,  $N\_S$  – минеральный азот в донных отложениях.

Выживание нехищного бентоса зависит от давления со стороны хищного бентоса, что учитывается в конструкции матрицы  $BENT\_H\_M(BENT\_H\_G, BENT\_C)$ . При переходе нехищного бентоса в новое состояние учитывается не только рассмотренные выше процессы, но и само предыдущее состояние (матрица  $BENT\_H1(BENT\_H, BENT\_H\_M)$ )

$$BENT\_H\_G(DET\_B, OX\_B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Рост хищного бентоса определяется кормовой базой (нехищным бентосом) и кислородными условиями в придонном слое воды (матрица  $BENT\_C\_G(BENT\_H, OX\_B)$ ). Переход в новое состояние осуществляется аналогично тому, как это сделано в случае нехищного бентоса (матрица  $BENT\_C1(BENT\_C, BENT\_C\_G)$ ).

Для учета потребления кислорода в придонном слое воды определяется суммарное дыхание бентоса (матрица  $Resp\_B(BENT\_H, BENT\_C)$ ). Новое состояние концентрации кислорода в придонном слое воды определяется при помощи матрицы  $OX\_B1(OX\_B, Resp\_B)$ .

При высокой концентрации растворенного кислорода в придонных слоях воды ( $OX\_B > 4$ ) происходит перенос фосфора и азота из придонного слоя воды в донные отложения. Этот процесс отображен в конструкции матриц  $P\_B1(P\_B, P\_S)$  и  $P\_S1(P\_B, P\_S)$ . Если концентрация фосфора в придонных слоях выше, чем в донных отложениях, то происходит уменьшение концентрации в придонных слоях и повышение содержания фосфора в донных отложениях. Например,

$P\_B1(7, 2) = 6$  и  $P\_S1(7, 2) = 3$ . Если градиент нулевой или отрицательный, то перенос не происходит ( $P\_B1(2, 7) = 2$  и  $P\_S1(2, 7) = 7$ ).

$$P\_B1(P\_B, P\_S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

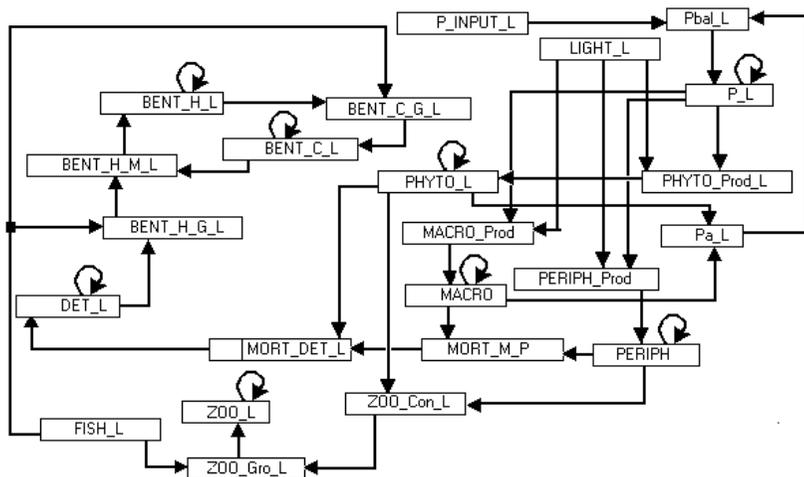
$$P\_S1(P\_B, P\_S) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

При низкой концентрации растворенного кислорода в придонных слоях воды ( $OX\_B < 5$ ) происходит перенос фосфора из донных отложений в придонный слой воды. Этот процесс отображен в конструкции матриц  $P\_B2(P\_B, P\_S)$  и  $P\_S2(P\_B, P\_S)$ . Если концентрация фосфора в донных отложениях выше, чем в придонных слоях воды, то происходит уменьшение концентрации в донных отложениях и повышение содержания фосфора в придонных слоях воды. Например,  $P\_B2(2, 7) = 3$  и  $P\_S2(2, 7) = 6$ . Если градиент нулевой или отрицательный, то перенос не происходит ( $P\_B2(7, 2) = 2$  и  $P\_S2(7, 2) = 7$ ).

$$P\_B2(P\_B, P\_S) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P\_S2(P\_B, P\_S) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Ячейка литоральной зоны водоема является наиболее сложной из-за наличия в ней таких элементов как макрофиты (*MACRO*) и перифитон (*PERIPH*). Схема композиции автоматов в литоральной ячейке водной экосистемы представлена на рис. 3.1.3.



**Рис. 3.1.3.** Схема композиции автоматов в литоральной ячейке водной экосистемы.

*MACRO* – биомасса макрофитов, *PERIPH* – биомасса перифитона, *PHYTO\_L* – биомасса фитопланктона, *BENT\_H\_L* – биомасса нехищного бентоса, *BENT\_C\_L* – биомасса хищного бентоса, *ZOO\_L* – биомасса зоопланктона, *DET\_L* – детрит, *P\_L* – минеральный фосфор, растворенный в воде, *LIGHT\_L* – освещенность, *P\_INPUT\_L* – поступление фосфора в литораль, *FISH\_L* – питание рыб на литорали, *MACRO\_Prod* – продукция макрофитов, *PERIPH\_Prod* – продукция перифитона, *PHYTO\_Prod\_L* – продукция фитопланктона литорали, *Pbal\_L* – баланс минерального фосфора, *Pa\_L* – потребление минерального фосфора, *MORT\_H\_P* – отмирание макрофитов и перифитона, *MORT\_DET\_L* – пополнение массы мертвой органики, *ZOO\_Con\_L* – пищевые условия зоопланктона, *ZOO\_Gro\_L* – рост зоопланктона, *BENT\_H\_G\_L* – рост нехищного бентоса, *BENT\_H\_M\_L* – выживание нехищного бентоса, *BENT\_C\_G\_L* – рост хищного зоопланктона

Продукция макрофитов определяется исходя из световых условий и концентрации биогенов в литоральных водах (матрица  $MACRO\_Prod(LIGHT\_L, P\_L)$ ). Накопление макрофитами большого количества биогенных элементов имитируется замедленным нарастанием их биомассы (матрица  $MACRO1(MACRO\_Prod, MACRO)$ ). Аналогично имитируется развитие перифитона и фитопланктона в воде литорали, только с существенно более быстрым оборотом биомассы (матрицы  $PERIPH\_Prod(LIGHT\_L, P\_L)$ ,  $PERIPH1(PERIPH\_Prod, PERIPH)$ ,  $PHYTO\_Prod\_L(LIGHT\_L, P\_L)$  и  $PHYTO\_L1(PHYTO\_L, PHYTO\_Prod\_L)$ ). Отмирание макрофитов и перифитона отражено в конструкции матриц  $MORT\_M\_P(MACRO, PERIPH)$  и  $MORT\_DET\_L(MORT\_M\_P, PHYTO\_L)$ . Изменению состояния детрита после его потребления бентосом соответствует автомат с матрицей переходов  $DET\_L1(DET\_L, MORT\_DET\_L)$ .

Литоральный бентос моделируется точно таким же образом, как и в бентосной ячейке модели, однако учитывается, что в литорали на биомассу как нехищного, так и хищного бентоса существенное влияние оказывает выедание рыбами-бентофагами. Все эти процессы отражены в матрицах  $BENT\_H\_G\_L(DET\_L, FISH\_L)$ ,  $BENT\_H\_M\_L(BENT\_H\_G\_L, BENT\_C\_L)$ ,  $BENT\_H\_L1(BENT\_H\_L, BENT\_H\_M\_L)$ ,  $BENT\_C\_G\_L(BENT\_H\_L, FISH\_L)$  и  $BENT\_C\_L1(BENT\_C\_L, BENT\_C\_G\_L)$ .

Полагается, что в питании зоопланктона литорали существенную роль играет перифитон. Кроме этого учитывается выедание литорального зоопланктона молодью рыб, населяющих водоем (матрицы  $ZOO\_Con\_L(PERIPH, PHYTO\_L)$ ,  $ZOO\_Gro\_L(ZOO\_Con\_L, FISH\_L)$  и  $ZOO\_L1(ZOO\_L, ZOO\_Gro\_L)$ ).

В балансе биогенов литорали существенную роль играет поступление их с водосборного бассейна ( $P\_INPUT$  и  $N\_INPUT$ ), а также потребление макрофитами, перифитоном и фитопланктоном литорали (матрицы  $Pa\_L(MACRO, PHYTO\_L)$ ,  $Pbal\_L(Pa\_L, P\_INPUT\_L)$  и  $P\_L1(P\_L, Pbal\_L)$ ).

В таблице 3.1.1 приведены результаты исследования модели. Предельным случаем для развития экосистемы (вариант 1) является сочетание условий максимальной освещенности ( $LIGHT=9$ ), наивысшей температуры воды ( $T=9$ ) и высокого поступления фосфора ( $P\_INPUT=9$ ) в сочетании с минимальным прессом со стороны рыб ( $FISH\_L=1$ ). При этом устойчивое состояние соответствует средним биомассам фито- и зоопланктона в пелагиали, сильному развитию макрофитов и перифитона в литорали, высоким биомассам нехищного бентоса в прибрежной зоне. Иными словами перед нами довольно типичный пример мелкого зарастающего эвтрофного водоема без явлений дефицита кислорода.

Вариант 2 исследован, в основном, для проверки реалистичности модели при экстремально низких входных переменных. Действительно низкая фосфорная нагрузка в сочетании с низкой температурой и отсутствием притока аллохтонной

органики (что вообще не предусмотрено в данной модели) ведут к появлению практически безжизненного водоема из любых начальных условий.

При средних значениях всех входных переменных (вариант 3) отмечается низкая биомасса фито- и, особенно, зоопланктона в пелагиали, малое развитие макрофитов и литорального бентоса. Все это напоминает мезотрофное или даже олиготрофное состояние водоема.

При увеличении воздействия со стороны молодежи рыб (вариант 4) получается картина сходная с результатами варианта 1 только при существенно более низкой биомассе бентоса в литорали.

**Таблица 3.1.1.** Устойчивые состояния модели водоема состоящего из одной пелагической, одной бентосной и одной литоральной ячейки

Переменные	Варианты						
	1	2	3	4	5	6	7
Освещенность LIGHT	9	1	5	9	9	9	3
Сток биогенов P_INPUT	9	1	5	9	2	2	2
Температура воды T	9	1	5	9	3	9	1
Трофическое воздействие рыб FISH_L	1	1	5	9	5	5	5
Минеральный азот в пелагиали N	5	5	5	5	3	5	5
Минеральный фосфор в пелагиали P	5	5	5	5	3	5	5
Биомасса фитопланктона в пелагиали A	4	1	2	4	4	1	1
Биомасса зоопланктона в пелагиали Z	4	1	1	4	1	1	1
Концентрация детрита в пелагиали D	4	1	2	4	4	1	1
Концентрация растворенного кислорода в пелагиали OX	6	9	6	6	9	9	7
Нехищный бентос BENT_H	4	1	2	4	1	1	1
Хищный бентос BENT_C	4	1	1	4	1	1	1
Концентрация растворенного кислорода в придонном слое воды OX_B	4	8	6	4	8	4	4
Фосфор в придонном слое воды P_B	1	5	1	1	1	5	1
Фосфор в донных отложениях P_S	9	1	8	9	9	4	1
Нехищный бентос литорали BENT_H_L	8	1	2	4	9	3	4
Хищный бентос литорали BENT_C_L	1	1	2	1	4	2	2
Биомасса макрофитов MACRO	9	1	1	9	7	4	1
Биомасса перифитона PERIPH	9	1	2	9	4	7	1
Биомасса фитопланктона литорали PHYTO_L	8	1	3	8	7	7	1
Минеральный фосфор в литорали P_L	9	1	5	9	7	4	1
Биомасса зоопланктона литорали ZOO_L	5	1	4	5	4	4	1
Концентрация детрита в литорали DET_L	9	6	6	9	4	9	6

Сочетание высоких световых условий с пониженной температурой воды и невысокой фосфорной нагрузки (вариант 5) создает своеобразные сочетания развития макрофитов и бентоса в литорали при существенной биомассе пелагического зоопланктона. Нечто похожее отмечалось на Ивано-Арахлейских озерах в Бурятии (Алимов, 2000). Повышение температуры воды для тех же условий (вариант 6) привело только к кратковременному повышению продуктивности водоема, а устойчивое состояние характеризуется низкими биомассами планктона при высокой концентрации мертвой органики на дне. Прототипом этой ситуации может служить образование сапропелевых озер (Кажак, 1998).

Вариант 7 имитирует условия мелких озер зоны лесотундры (Китаев, 1984), где функционирование экосистемы находится на крайне низком уровне и поддерживается, в основном, за счет бентоса.

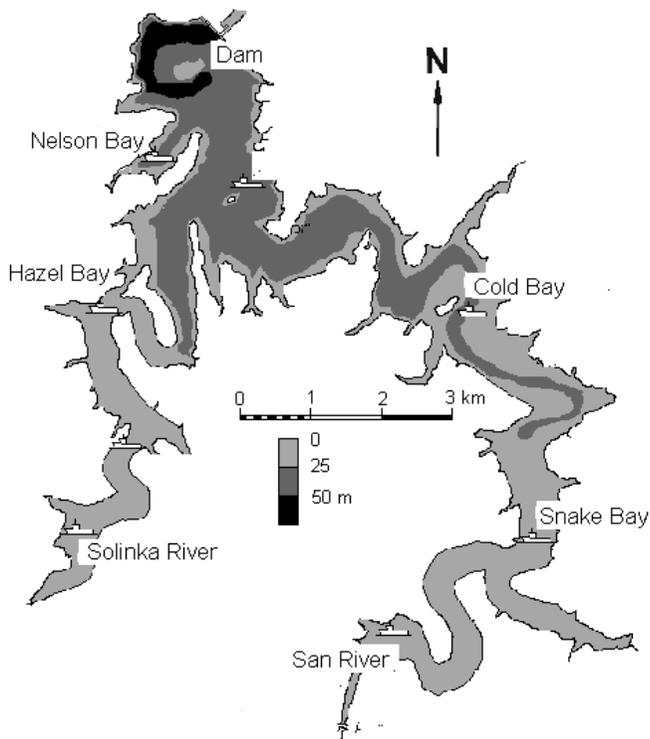
Материал настоящего раздела является подготовительным для разделов 3.2 и 3.3, в которых используются с некоторыми модификациями разработанные в настоящем разделе автоматы пелагической, бентосной и литоральной ячеек водной экологической системы.

### **3.2 Модель экосистемы водохранилища Солина**

Водоохранилище Солина расположено в юго-восточной части Польши и образовалось в 1968 в результате постройки плотины на реке Сан, притоке Вислы (рис. 3.2.1). Наивысший уровень 420 м над уровнем моря, наинизший -401.5 м. Абсолютный минимальный уровень у подножья плотины 363 м над уровнем моря. Общий объем водохранилища  $471 \times 10^6$  куб.м. Рабочий объем, соответствующий срабатыванию от наивысшего уровня до наинизшего составляет  $293 \times 10^6$  куб.м. Поверхность водохранилища, соответствующая уровню 420 м над уровнем моря, составляет 21 кв.км. Длина водохранилища от плотины до впадения Сана составляет 14 км, а до впадения Солинки 26 км. Годовой расход воды составляет в среднем  $606.5 \times 10^6$  куб.м.

Водоохранилище Солина кроме своей основной гидроэнергетической функции является неотъемлемым элементом ландшафта Бещад, влияя на климат, гидрологический режим и всю систему природопользования этого региона Польши. В частности, велико и имеет тенденцию к росту рекреационное значение водохранилища. Не менее важна роль Солины как резервуара питьевой воды, причем серьезно рассматривался проект водоснабжения Кракова с использованием водных ресурсов Солины. Явно не используются рыбохозяйственные ресурсы водохранилища. Все сказанное свидетельствует об актуальности

проблемы управления качеством воды и сопряженными с этой величиной характеристиками с целью разработки таких режимов работы гидроузла, которые были бы оптимальными не только с энергетической, но и с экологической и экономической точек зрения. Решение подобной проблемы без построения компьютерной модели экологической системы водохранилища в современных условиях представляется не только не целесообразным, но и просто невозможным.



**Рис. 3.2.1.** Схематическая карта водохранилища Солина

Проблема управления природными ресурсами пресных вод особенно актуальна для водохранилищ, режим которых в гораздо большей степени зависит от воздействий со стороны человеческого общества, нежели режим озер и рек. Задача оптимального управления природными ресурсами водоема (включая сюда гидроэнергетику, водопользование, рыбное хозяйство и др.) в обобщенном виде была поставлена достаточно давно (Меншуткин, 1967b), однако конкретизация для реального водоема, в частности водохранилища, встретила большие трудности, которые связаны с тем, что обязательным условием для количественного

решения задачи об оптимальном управлении каким-либо объектом (экосистемы водохранилища, в частности) является наличие достаточно реалистичной математической или имитационной модели этого объекта.

Качественные соображения о стратегии управления экосистемой водохранилища (Авакян, Асарин, 1998) заключаются в том, что уровенный режим водохранилища должен выбираться не только из соображений гидроэнергетики и регулирования уровня рек во время паводков, но и из соображений оптимального развития экосистемы, в частности недопущения обсыхания нерестилищ рыб при быстром срабатывании уровня. Цель настоящей работы заключается в приложении идей теории оптимального управления к конкретному природному объекту – водохранилищу Солина, расположенному на юге Польши на реке Сан.

Будем полагать, что все величины, характеризующие состояние экологической системы, ее управляемые и неуправляемые входы, шкалированы в виде дискретных целых чисел от 1 до 9.

Блок-схема модели представлена на рис. 3.2.3. Состояние экологической системы определяется:  $L$  – уровнем водохранилища,  $TE$  – температурой эпилимниона,  $TH$  – температурой гипolimниона,  $S$  – содержанием в воде (концентрацией) неорганических взвесей,  $P$  – концентрацией минерального (неорганического) фосфора, растворенного в воде,  $A$  – биомассой фитопланктона,  $Z$  – биомассой зоопланктона,  $B$  – биомассой бентоса,  $F$  – ихтиомассой рыб. Неуправляемые входы системы:  $INFW$  – поступления (сток) воды,  $INFS$  – поступления (сток) неорганических взвесей,  $INFP$  – поступления фосфора в водохранилище,  $LIGHT$  – поступления солнечной радиации,  $HEAT$  – теплового потока через поверхность водохранилища,  $WIND$  – ветровых условий над поверхностью водохранилища. Управляемые входы:  $EOUT$  – сброс (сток) воды из водохранилища Солина в водохранилище Мышковце,  $EIN$  – накачивание воды из водохранилища Мышковце в водохранилище Солина,  $FISH$  – интенсивность промысла рыбы в Солине. Временной шаг модели полагается равным одному месяцу.

Схема композиции автоматов приведена на рис. 3.2.3. Обозначения переменных текущего года (верхний ряд), следующего года (нижний ряд), а также входных переменных такие же, как на рис. 3.2.2. Кроме этого обозначены следующие промежуточные переменные:  $WATBAL1$  – водной баланс с учетом деятельности гидроузла,  $WATBAL2$  – водной баланс с учетом речного стока,  $TEM1$  – нагрев или охлаждение воды в эпилимнионе,  $TEM2$  – теплообмен между эпи- и гипolimнионом,  $TEM3$  – изменение температур в эпи- и гипolimнионе,  $SUS1$  – поступление взвесей в водохранилище,  $SUS2$  – вынос взвесей из водохранилища,

*PROD1* – первичная продукция фитопланктона, *PROD2* – выедание фитопланктона зоопланктоном, *A1* –изменения биомассы фитопланктона, *ZOO1* – питание зоопланктона, *ZOO2* – развитие зоопланктона, *BENL* – влияние на бентос изменений уровня водохранилища, *BENP* – питание бентоса, *BENF* – выедание бентоса рыбами, *FISH1* – воздействие рыболовства на сообщество рыб, *FISH2* – питание рыб зоопланктоном, *FISH3*– питание рыб бентосом.

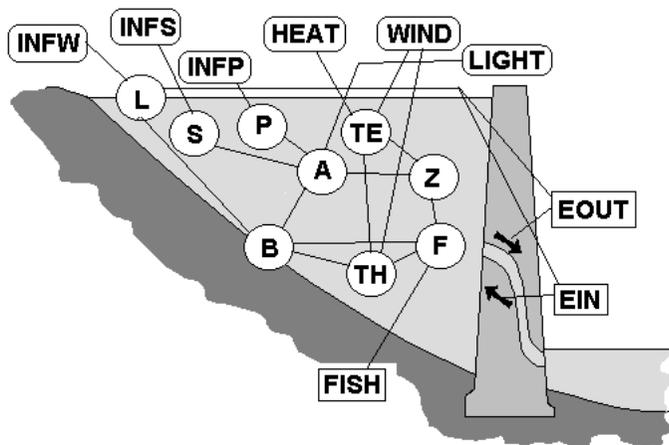


Рис. 3.2.2. Блок-схема модели экосистемы водохранилища Солина

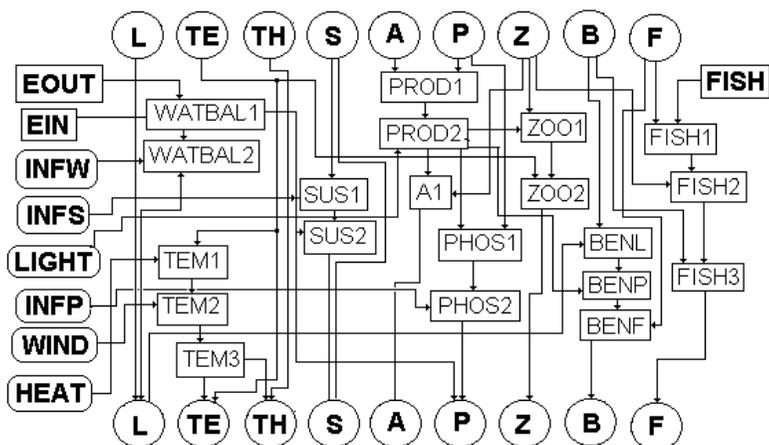


Рис. 3.2.3. Схема композиции автоматов в модели водохранилища Солина

Каждый автомат имеет два входа. Выход автомата соответствует его состоянию. Функция переходов определяется матрицей. Например, влияние изменений

уровня водохранилища ( $L1$  и  $L2$ ) на развитие бентоса (блок  $BENTL$  на рис. 3.2.3) описывается матрицей  $BENTLL1, L2$ ).

$$BENTL(L1, L2) = \begin{vmatrix} 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 7 & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 7 & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

В этой матрице строкам соответствуют индексы уровня, характерные для месяца  $MON$ , а столбцам – индексы уровня, характерные для месяца  $MON+1$ . Элементы матрицы соответствуют индексам благополучия развития бентоса  $BENTL$ . Например, на пересечении первого столбца и девятой строки матрицы  $BENTL=1$ , это означает, что при падении уровня водохранилища с самого высокого ( $L1=9$ ) до самого низкого ( $L1=1$ ) условия для развития бентоса наилучшие – бентосные организмы испытывают массовую гибель при обсыхании берегов водохранилища. Аналогичным образом построены все остальные автоматы.

Вклад в водный баланс водохранилища от действий гидроэнергетического узла ( $WATBAL1$ ) складывается из пропусков воды в нижний бьеф ( $EOUT$ ) и накачки воды из нижнего бьефа водохранилища ( $EIN$ ). При этом в величину  $EOUT$  включается и холостой сброс воды, минуя турбины. Приходная часть водного баланса ( $INFW$ ) позволяет оценить общий объем воды ( $WATBAL2$ ) и на основании уровня в предыдущий месяц ( $L1$ ) определить новое положение уровня воды ( $L2$ ).

Температура воды в эпилимнионе ( $TE$ ) в течение месяца может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от направления теплового потока через поверхность водохранилища ( $HEAT$ ), что имитируется автоматом  $TEM1$ . Устойчивость водной массы водохранилища определяется соотношением плотности воды в эпи- и гипolimнионе, которое определяется автоматом  $TEM2$ , исходя из предположения об однозначном соответствии между плотностью и температурой воды. На теплообмен между эпи- и гипolimнионом помимо устойчивости водного тела влияют еще и ветровые условия над поверхностью воды ( $WIND$ ).

Концентрация неорганических взвесей в воде, которая определяет ее прозрачность, определяется, с одной стороны, вносом взвесей с притекающей водой (*INFS*) и, с другой стороны, сливом воды из водохранилища (*WATBAL1*).

Первичная продукция фитопланктона (*PROD1*) лимитируется световым потоком, поступающим на поверхность водоема (*LIGHT*) с учетом изменения глубины фотической зоны из-за изменения прозрачности воды. Другим лимитирующим фактором создания первичной продукции является концентрация в воде неорганического фосфора (*P*). При оценке прироста или сокращения биомассы фитопланктона учитывается возможность его выедания зоопланктоном (*Z*).

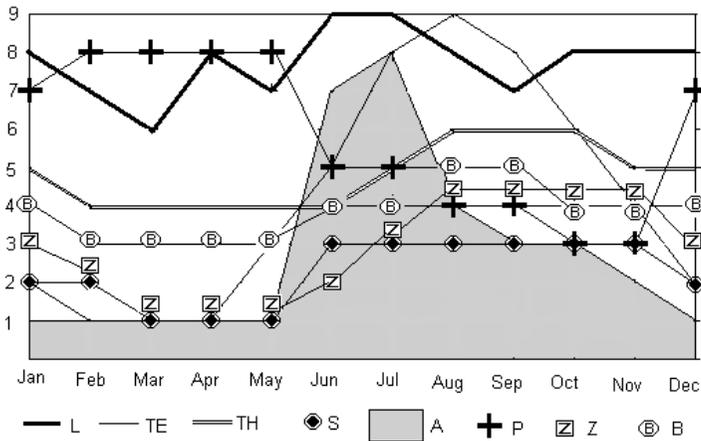
При моделировании динамики фосфора в воде, учитывается его потребление фитопланктоном, которое полагается пропорциональным величине первичной продукции (*PROD2*), поступление фосфора от внешних источников (*INFP*) и его вынос в нижний бьеф водохранилища (*WATBAL1*).

Биомасса зоопланктона (*Z*) в данном месяце полагалась зависящей от значения этой величины в предыдущий месяц, первичной продукции фитопланктона (*PROD2*) и выедания зоопланктона рыбами (*F*).

На развитие бентоса (*B*), как уже указывалось выше, оказывает влияние динамика уровня режима водохранилища, а также поступление мертвого органического вещества – детрита, которое полагалось пропорциональным величине первичной продукции фитопланктона. Кроме этого учитывалась возможность выедания бентоса рыбами.

Ихтиомасса рыб в водохранилище (*F*) полагается в модели зависящей как от кормовой базы (зоопланктона и бентоса), так и от воздействия промысла (*FISH*).

На рис. 3.2.4 приведена типичная диаграмма изменения состояния экосистемы водохранилища Солина в течение года. За неимением данных круглогодичных наблюдений, говорить о строгой верификации модели не приходится. Данные собственных наблюдений над термикой водоема и первичной продукцией летом 1999 и 2000 года, данные Т. Пуллорака о динамике биомассы зоопланктона, результаты исследования бентоса (Т. Прус, М. Прус и П. Бийок, 1999), данные о динамике уровня и расходах воды через плотину, любезно предоставленные дирекцией гидроузла Солина-Мышковце, а также отчет Института пресноводного рыбного хозяйства в Ольштинне о состоянии ихтиофауны Солины по данным эхоакустического зондирования (1999) позволяют только качественно оценить правдоподобность созданной модели.



**Рис. 3.2.4.** Динамика элементов экосистемы водохранилища Солина в течение года.  
 По оси ординат – оценка состояния элементов в баллах, по оси абсцисс – месяца, обозначение переменных как на рис. 3.2.2

Для оценки свойств созданной модели экосистемы водохранилища Солина проведем серию компьютерных экспериментов, в которых внешние воздействия на систему будут изменяться по одному, что в природе никогда не бывает и свойственно только методике лабораторных опытов. Вариант модели, динамика элементов которого представлена на рис. 3.2.4, примем за основной, а его конечное состояние в качестве начального состояния для всех экспериментов. Результаты компьютерных экспериментов приведены в таблице 3.2.1.

**Таблица 3.2.1.** Влияние изменения внешних воздействий на экосистему водохранилища Солина. Все величины – средние за год и приведены в процентах от данных основного варианта

Воздействие на экосистему	L	TE	TH	S	A	P	Z	B	F
Весенний паводок	109	100	100	428	70	103	97	150	106
Осенний паводок	103	100	100	357	73	103	97	147	105
Увеличение фосфорной нагрузки	100	100	100	100	117	105	105	150	120
Снижение фосфорной нагрузки	100	100	100	100	60	63	74	97	96
Увеличение притока тепла	100	114	103	100	93	100	147	100	105
Снижение притока тепла	100	89	98	100	110	100	53	100	97
Уменьшение облачности	100	100	100	100	106	85	109	104	100
Увеличение облачности	100	100	100	100	76	103	97	97	100
Увеличение слива воды через плотину	15	106	102	54	97	105	138	90	87
Снижение слива воды через плотину	112	100	100	428	76	107	94	150	105
Увеличение закачки воды из нижнего бьефа	106	100	100	375	67	100	94	150	105
Интенсификация промысла рыбы	100	100	100	100	100	100	112	120	37

Как следует из данных таблицы 3.2.1, увеличение поступления воды в весенние месяцы, при прочих равных условиях, приводит к увеличению мутности воды и, как следствие, к снижению первичной продукции и биомассы фитопланктона. Биомасса зоопланктона при этом несколько сокращается, а биомасса бентоса возрастает за счет увеличения литорали. Реакция экосистемы на паводок в осенние месяцы приводит к аналогичным, но более мягким результатам, поскольку за зимние месяцы часть взвешенных веществ успевает выйти из водохранилища со стоком через плотину.

Увеличение фосфорной нагрузки на водохранилище приводит к росту первичной продукции, биомассы зоопланктона и бентоса, а также ихтиомассе рыб. Снижение поступления фосфора оказывает обратное воздействие на экологическую систему водохранилища.

Увеличение потока тепла через поверхность водохранилища (в результате глобального потепления или вековых колебаний климата) приводит не только к росту температуры воды в эпи- и гипolimнионе, но и к росту биомассы зоопланктона и незначительному повышению ихтиомассы. Снижение теплового потока оказывает на экосистему противоположное действие.

Снижение среднего балла облачности над поверхностью водохранилища во время вегетационного периода можно интерпретировать как увеличение фотосинтетически активной радиации, поступающей на поверхность воды. Эффект такого воздействия на экосистему заключается не только в повышении первичной продукции, но и снижением концентрации неорганического фосфора в воде и повышением биомассы зоопланктона и бентоса. Увеличение облачности приводит к обратному эффекту.

Увеличение пропуска воды через плотину в течение всего года приводит к резкому снижению уровня водохранилища. Температура воды в эпи- и гипolimнионе при этом несколько возрастают из-за уменьшения массы воды. Увеличение проточности водохранилища приводит к большему выносу из него взвешенных частиц и, как следствие, к увеличению прозрачности воды. Это, в свою очередь, в небольшой степени стимулирует развитие фитопланктона и рост биомассы зоопланктона. Биомасса бентоса в таких условиях падает из-за сокращения площади литорали.

Сокращение пропуска воды через плотину приводит к почти постоянному высокому уровню воды в течение всего года. Однако мутность воды при этом

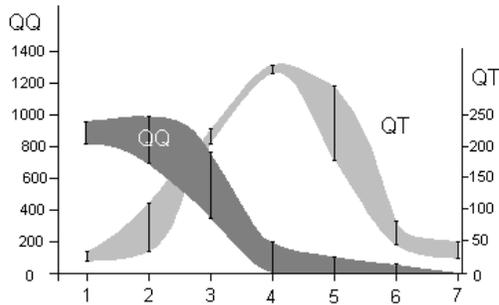
повышается, что приводит к снижению первичной продукции. Однако биомасса бентоса в условиях стабильного высокого уровня воды растет, что приводит к возрастанию ихтиомассы рыб, несмотря на некоторое сокращение биомассы зоопланктона.

Попытки поддержания уровня водохранилища на высоких отметках не путем сокращения пропуска воды через турбины, а путем интенсивной накачки воды из нижнего бьефа, приводят к результатам сходным с результатами только что рассмотренного варианта. Однако производительность насосов не во всех случаях может оказаться достаточной для поддержания высокого уровня при сохранении режима слива, принятого в основном варианте.

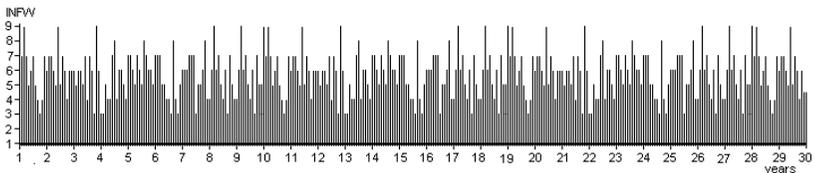
Результаты этого раздела, в принципе, не противоречат общим положениям известным к настоящему времени о динамике экологических систем горных водохранилищ, таких, например, как японские (Miyanaga, 1986) или французские (Salencon, Thebault, 1996), для экосистем которых созданы достаточно подробные имитационные модели.

В отличие от искусственной ситуации, рассмотренной выше, реальные условия характеризуются одновременным изменением всех внешних воздействий на экологическую систему водохранилища, причем условия одного года не повторяют условия в предыдущие годы и можно говорить только о вероятностных характеристиках этих воздействий. На рис. 3.2.5 приведена эмпирическая функция распределения времени наступления крупных паводков, полученная по материалам за все время существования водохранилища Солина (1968-2000 годы). К сожалению, аналогичными многолетними данными по другим характеристикам воздействия на экосистему Солины мы не располагаем.

Предполагается, что статистические характеристики водности рек Сан и Солинка, втекающих в водохранилище, останутся неизменными, по крайней мере, в течение ближайших 30 лет. В этом случае имитация характеристик водного стока (INFW) осуществляется исходя из требования сохранения функции распределения, приведенной на рис. 3.2.6, и вероятностей того, что в году произойдет один, два или три паводка, или же их вообще не будет (как это отмечалось в 1972 и 1991 годах). Детали программной имитации случайных внешних воздействий принимаем традиционными при применении метода Монте-Карло (Manly, 1998). Пример реализации возможных притоков воды в Солину в течение 30 лет приведен на рис. 3.2.5.



**Рис. 3.2.5.** Зависимость количества воды, пропускаемого через турбины гидроузла ( $QT$ ) и холодного слива через верх плотины ( $QQ$ ) при различных интенсивностях пропуска воды через плотину. Данные осреднены за 30 лет эксплуатации с использованием случайной функции стока, пример которой приведен на рис. 3.2.6



**Рис. 3.2.6.** Пример реконструкции случайной функции стока ( $INFV$ ) использованной при компьютерных экспериментах с моделью экосистемы водохранилища Солина

В отличие от природных внешних воздействий на водохранилище, управляемые воздействия ( $EOUT$ ,  $EIN$  и  $FISH$ ) не случайны и можно предположить, что при их назначении лица, принимающие решения, придерживаются некоторых определенных стратегий. Начнем с самых простых предположений, например о том, что ежемесячный пропуск воды через турбины электростанции выдерживается постоянным, если, конечно, это допускается положением уровня воды. Такая стратегия при сгенерированных описанным выше способом внешних природных условиях приводит при больших пропусках воды снижению уровня до минимального, а при малых пропусках к значительным холостым сбросам воды через верх плотины. Оптимальный, с точки зрения выработки максимального количества электроэнергии за 30 лет, режим лежит между этими двумя крайностями.

Во всякой задаче управления каким-либо объектом необходимо сформулировать критерий управления, который в процессе осуществления управления следует максимизировать или минимизировать. Выше говорилось о максимальной выработке электроэнергии, но не только этим определяется рациональность

использования природных ресурсов водохранилища, не следует забывать о качестве наполняющей его воды и рыбных запасах. Исходя из этого, предложим критерий эффективности использования природных запасов водохранилища в виде (Меншуткин, 1972):

$$\Psi = \sum_{t=1}^{t_{\max}} K_E \times ELPW(i) + \sum_{t=1}^{t_{\max}} K_Y \times YIELD(i) - \sum_{t=1}^{t_{\max}} K_W \times WQ(i)$$

где  $ELPW(i)$  – количество выработанной электроэнергии,  $YIELD(i)$  – вылов рыбы,  $WQ(i)$  – отклонения качества воды от принятого стандарта,  $K_E$ ,  $K_Y$  и  $K_W$  – весовые коэффициенты, соответствующие не только стоимости электроэнергии и выловленной рыбы, но и учитывающие приоритетность отдельных областей природопользования. Суммирование по времени от  $t$  до  $t_{\max}$  показывает, что критерий имеет смысл применять только для длительных промежутков времени. Конечно, назначение коэффициентов  $K_E$ ,  $K_Y$  и, особенно,  $K_W$  – дело субъективное и решаемое только для конкретных экономических ситуаций. Более подробно вопросы принятия решений изложены в разделе 1.6.

Для конкретных условий водохранилища Солина в рамках принятой качественной модели экологической системы, величину  $ELPW(i)$  естественно предположить пропорциональной  $EOUT$ , не вдаваясь в детали суточного ритма перекачки воды, величину  $YIELD(i)$  поставить в зависимость от рыбных запасов ( $F$ ) и интенсивности их облова ( $FISH$ ), а величину  $WQ(i)$  полагать отличной от нуля в тех случаях, когда биомасса фитопланктона ( $A$ ) превзойдет некоторый критический уровень.

Стратегия 1 заключается в том, что пропуски воды через плотину выбираются таким образом, чтобы обеспечить наибольшее заполнение водохранилища. Стратегия 2 заключается в том, чтобы избежать холостых пропусков воды и получить максимальную выработку энергии. Стратегия 3 является промежуточной между стратегиями 1 и 2 и допускает минимальные холостые сбросы воды через плотину во время паводков.

Компьютерные эксперименты проводились для времени эксплуатации в 30 лет ( $t_{\max} = 30$ ) из одного и того же начального состояния при внешних воздействиях на систему в виде случайных функций времени. Каждый вариант повторялся 20 раз для возможности статистической оценки результатов. В таблице 3.2.2 приведены значения критерия эффективности для всех рассмотренных вариантов.

**Таблица 3.2.2** Эффективность использования природных ресурсов водохранилища Солина при различных вариантах природных условий и стратегий управления (указаны средние значения при 20 повторах и стандартные отклонения)

	Варианты природных условий (стратегий природы)			
	Основной	С увеличенной фосфорной нагрузкой	С увеличенным стоком с водосбора	С уменьшенным стоком с водосбора
Стратегия 1	105±20	67±15	88±32	118±13
Стратегия 2	83±18	72±16	118±18	105±16
Стратегия 3	96±22	71±17	101±24	111±11

В базовом варианте внешних воздействий наиболее эффективной оказывается стратегия 3, при повышенной водности более эффективна стратегия 2, а при уменьшенной водности – стратегия 1. В случае повышенного сброса фосфора в водохранилище наибольший эффект дает стратегия 2.

Основной смысл настоящего заключается в том, что задача об управлении экологической системой водохранилища Солина от чисто словесной формулировки о том, что хорошо бы и электроэнергии получать побольше и воду сохранять чистой и еще, чтобы в этой воде ловилось много рыбы (Poltorak et al., 1997), переведена в количественную форму, допускающую использование богатейшего арсенала теории оптимального управления. Конечно, использованная в настоящей работе модель крайне упрощена, в ней отсутствуют такие важные элементы как динамика распределения элементов экосистемы по глубине и акватории водохранилища, не учитывается кислородный режим водоема, а сообщество рыб представлено всего одной переменной без разделения на видовые популяции и трофические уровни. Можно продолжить список неучтенных в предложенной модели элементов и явлений в водохранилище, которые так или иначе влияют на конечный результат его хозяйственного использования, но дело в том, что данная модель должна рассматриваться не как конечный этап исследования, а как программа будущих натурных наблюдений и модельных разработок.

Действительно, каждый блок, каждую матрицу переходов модели можно рассматривать как задание на более углубленные и конкретизированные исследования. Например, блоки *HEAT*, *TE* и *TH* представляют собой свернутое представление термического баланса водохранилища с определением радиационного баланса, длинноволнового излучения поверхности воды, турбулентного теплообмена и затрат на испарение. За блоками *A* и *Z* кроются не только процессы первичного продуцирования и сукцессии видов в фитопланктонном сообществе, но и

вертикальные миграции зоопланктона и взаимодействие хищного зоопланктона с фильтраторами. Однако все частные исследования и модели, как бы хорошо они не отражали реальность, не могут заменить общей модели экосистемы водохранилища, поскольку задача управления может быть решена только на экосистемном уровне.

Задание критерия управления является очень не простым делом (Авакян, Асарин, 1998) и то, что предложено в настоящей работе – это не более чем демонстрация методики выбора оптимальной стратегии управления, а не реальные рекомендации для эксплуатации водохранилища Солина.

### 3.3 Модель экосистемы Сулеевского водохранилища

Сулеевское водохранилище создано в 1974 году на реке Пилице (левый приток Вислы) и служит в качестве источника водоснабжения для Лодзи, регулятора паводковых вод, выработки электроэнергии и рекреации. Максимальный объем водохранилища  $75 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ , минимальный –  $61 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ . Максимальная поверхность 2380 га, а минимальная всего 630 га. Средняя глубина составляет 3.3 м, а максимальная у плотины 11 м. Длина водохранилища около 11 км, а средняя ширина 2 км. Гарантированный водозабор составляет  $3.25 \text{ м}^3/\text{сек.}$ , а гарантированный сток из водохранилища  $10.55 \text{ м}^3/\text{сек.}$  Максимальный пропуск воды отмечался на уровне  $417 \text{ м}^3/\text{сек.}$ , а минимальный  $3.9 \text{ м}^3/\text{сек.}$  Максимальные колебания уровня составляют 4.6 м. Схематическая карта водохранилища приведена на рис. 3.3.1.

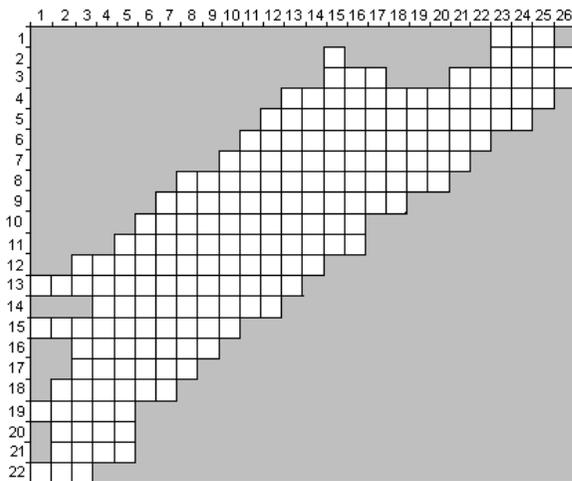
Основным материалом для построения модели служила работа Тарчинской (1998) по гидробиологии и Тимченко (1999) по гидродинамике водохранилища.



Рис. 3.3.1. Схематическая карта Сулеевского водохранилища.

1 – точки постоянных наблюдений

Начнем с гидрологической части экологической системы Сулеевского водохранилища. Из-за мелководности водохранилища вертикальными градиентами компонент можно пренебречь и рассматривать только горизонтальные переносы. Горизонтальная турбулентная диффузия имитировалась при помощи техники клеточных автоматов. Вся акватория водохранилища была поделена на квадратные ячейки размером 250 на 250 метров (рис. 3.3.2).



**Рис. 3.3.2.** Схема пространственного расположения ячеек в модели экосистемы Сулеевского водохранилища. Размер ячейки 250 м×250 м

Концентрации компонент, как это принято в большинстве разделов этой книги, определены на девятикомпонентном множестве. Взаимодействие двух соседних ячеек определялось исходя из градиента примеси (взвешенного или растворенного вещества, а так же фито- и зоопланктона) между этими ячейками. Если концентрации были равны, то никакой диффузии не происходило, в противном случае осуществлялся перенос из ячейки с большим содержанием примеси в ячейку с меньшим содержанием примеси.

Функция определения соседа  $i$ -й ячейки определена как  $NEIGH(i)$  и работает по принципу поиска четырех соседей (рис. 1.5.7, вариант А).

$$SUS1(NEIGH(i)) = F\_DIF1(SUS(i), SUS(NEIGH(i)))$$

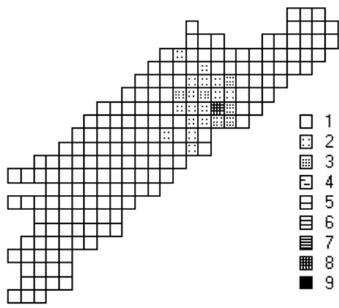
$$SUS1(i) = F\_DIF2(SUS(i), SUS(NEIGH(i)))$$

Матрицы переходов автоматов для имитации горизонтальной диффузии приведены ниже.

$$F\_DIF1(SUS(NEIGB(i), SUS(i)) = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \hline 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ \hline 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ \hline \end{array}$$
  

$$F\_DIF2(SUS(i), SUS(NEIGB(i)) = \begin{array}{|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 7 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 \\ \hline \end{array}$$

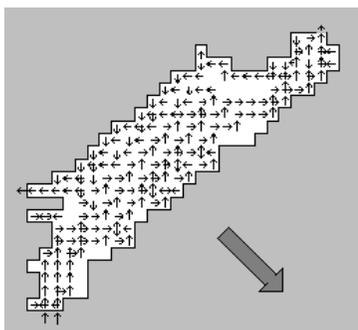
Результаты модельного эксперимента по распространению консервативной примеси в Сулеевском водохранилище представлены на рис. 3.3.3.



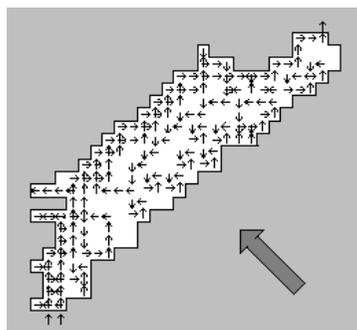
**Рис. 3.3.3.** Эксперимент по диффузии консервативной примеси в модели Сулеевского водохранилища. В ячейке 77 находится источник примеси. Показано состояние через 10 временных шагов после начала действия источника

Ввиду малой глубины водохранилища для расчета ветровых течений в нем применяются так называемые «уравнения мелкой воды», в которых не учитыва-

ется градиент скорости течения по вертикали. Схемы течений получены в результате обработки карт, приведенных в работе Тимченко (1999) при наиболее характерных направлениях ветра (рис. 3.3.4 и 3.3.5).



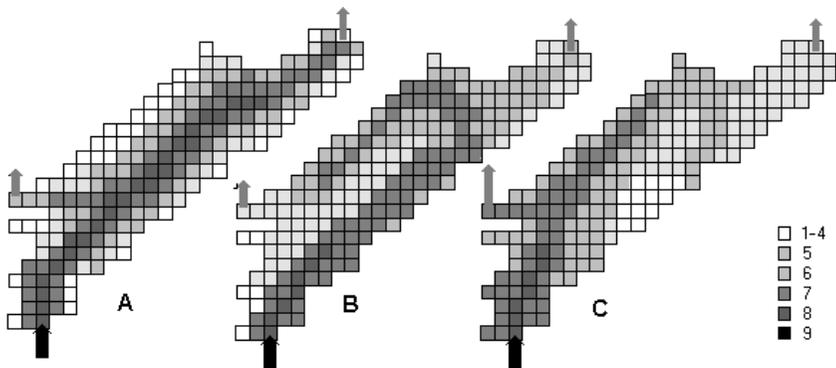
**Рис. 3.3.4.** Схема течений в Сулеевском водохранилище при северо-западном ветре



**Рис. 3.3.5.** Схема течений в Сулеевском водохранилище при юго-восточном ветре

В отличие от диффузионного переноса, перенос градиентными и ветровыми течениями осуществлялся не во все соседние ячейки, а только в ту, куда было направлено течение в данном случае.

Результаты модельных экспериментов по распространению консервативной примеси в Сулеевском водохранилище при совместном действии течений и горизонтальной диффузии представлены на рис. 3.3.6. Источником примеси в этом случае служила река Пилица.



**Рис. 3.3.6.** Эксперименты по распространению консервативной примеси в модели Сулеевского водохранилища под действием стоковых и ветровых течений. Источник примеси – река Пилица. А – штилевая погода, В – северо-западный ветер, С – юго-восточный ветер

### 3.4 Базы знаний по водным экосистемам

Представление водной экологической системы в виде конечного автомата, который может находиться в различных состояниях, открывает широкие возможности по созданию экспертных систем и баз знаний по экогидрологии (Salski, 1992; Lembach, 1994; Keller, Dungan, 1999). Начнем с простого иллюстративного примера. Предположим, что в результате обследования некоторой части озерного региона было установлено, что из 10 исследованных озер 4 озера квалифицированы как эвтрофные, причем в 6 озерах был обнаружен карась. Из 4-х эвтрофных озер, в 3-х обнаружены караси. Известно, что некотором озере из обследованного района водятся караси. Спрашивается, какова вероятность, что это озеро эвтрофное.

Из заданных условий явствует, что озеро может находиться в двух состояниях:  $E$  – эвтрофном и  $O$  – неэвтрофном, скажем олиготрофном, мезотрофном или дистрофном. Априорная вероятность того, что озеро эвтрофное для данного района составляет  $P(E) = 4/10 = 0.4$ . Условная вероятность обнаружения карася в эвтрофном озере составляет  $P(K|E) = 3/4 = 0.75$ . Тогда вероятность того, что озеро, в котором обнаружен карась, является эвтрофным  $P(E|K)$  можно вычислить по формуле Байеса:

$$P(E|K) = \frac{P(E) \cdot P(K|E)}{P(E) \cdot P(K|E) + P(O) \cdot P(K|O)}$$

Здесь  $P(K|O)$  – условная вероятность обнаружения карася в неэвтрофном озере, которая составляет в данном примере  $1/3$ . Подставляя численные значения вероятностей, получаем:

$$P(E|K) = \frac{0.4 \cdot 0.75}{0.4 \cdot 0.75 + 0.6 \cdot 0.33} = 0.6$$

Данный пример призван показать, как можно связывать в единое целое разнородную информацию о водных экосистемах, в рассмотренном примере это было только трофическое состояние и отрывочная характеристика ихтиофауны, но в более реалистических случаях характеристики состояний могут быть гораздо сложнее.

В качестве конкретного примера воспользуемся материалом из монографии С.П. Китаева (1984), в которой приводится обработка сведений по озерам Финляндии, Карелии и Северо-Западной части России, причем использованы данные

более чем по 2000 озер с площадью не более 50 км<sup>2</sup>, т.к. такие крупные озера как Сайма, Ладога, Онега и др. из рассмотрения выпадают, как уникальные.

Начнем со шкалирования переменных, описывающих озерные экосистемы. В таблице 3.4.1 приведены градации и пределы изменения принятых переменных, причем большинство шкал имеет равномерный, а прогрессивно возрастающий шаг, что типично для природных величин.

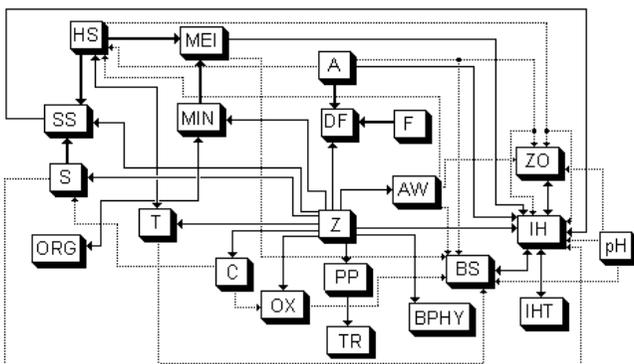
**Таблица 3.4.1.** Переменные базы знаний озерных экосистем

(ихтиоценозы: 1 – щучный, 2 – окунево-щучный, 3 – окунево-ершовый, 4 – окуневый, 5 – окунево-плотвичный, 6 – карасевый, 7 – плотвично-окуневый, 8 – лещево-плотвичный. Трофические состояния: 1 – α-олиготрофный, 2 – β-олиготрофный, 3 – α-мезотрофный, 4 – мезотрофный, 5 – эвтрофный, 6 – эвтрофный, 7 – гиперэвтрофный)

Название	Обозначение	Размерность	Перечисление состояний или их границы							
			Тундра		Сев. тайга		Юж. тайга		Смешанный лес	
Ландшафтная зона	Z	-								
Площадь озера	A	km <sup>2</sup>	0.1	0.5	1	5	10		50	
Средняя глубина	HS	m	2		4		8		16	
Удельный водосбор	DF	-	2	4	8	16	32	64		128
Степень проточности	AW	1/year	0.25	0.5	1		2	4		8   16
Термика	T	-	эпитерм		эпиметерм		метатерм	Метагипотерм		гипотерм
Прозрачность воды	S	m	1		2		4		8	
Относительная прозрачность	SS = S/HS	-	0.25		0.5		1		2	
Цветность воды	C	Co-Pt	20		40		80		160	
Насыщение кислородом	OX	%	70		85		100		115	
Общая минерализация	MIN	mg/l	12.5	25	50		100	200		400
Морфоэдафический индекс	MEI = MIN/HS	-	3.1		6.2		12	25		50
Концентрация органического вещества	ORG	mg/l	7.5		15		30		60	
РН	PH	-	5		6		7		8	
Биомасса фитопланктона	BPHY	g/m <sup>3</sup>	0.5	1	2	4	8	16	32	64
Первичная продукция	PP	gC/m <sup>2</sup> year	12.5	25	50		100		200	400
Биомасса зоопланктона	ZO	g/m <sup>2</sup>	1.3		2.5		5		10	
Биомасса бентоса	BS	g/m <sup>2</sup>	1.3	2.5	5	10		20		
Ихтиомасса	IH	kg/ha	12.5	25	50	100		200		
Тип ихтиоценоза	IHT	-	1	2	3	4	5	6	7	8
Трофическое состояние	TR	-	1		2	3	4	5	6	7

Заметим, что под эпитермическими (T=1) понимаются, в данном случае, такие озера, которые не имеют термической стратификации и перемешиваются

до дна. У эпиметатермических озер ( $T=2$ ) величина эпилимниона существенно превышает суммарную величину мета- и гиполимниона. Метатермическими ( $T=3$ ) называются озера, у которых объем эпилимниона близок к суммарному объему мета и гиполимниона. Метагипотермическими ( $T=4$ ) называются озера с превышением объема гиполимниона над эпилимнионом и, наконец, гипотермические озера ( $T=5$ ) характеризуются значительным превышением объема гипо- и металимниона над объемом эпилимниона.



**Рис. 3.4.1.** Схема связей в базе знаний по северным озерам.

Жирные линии соответствуют детерминированным связям.

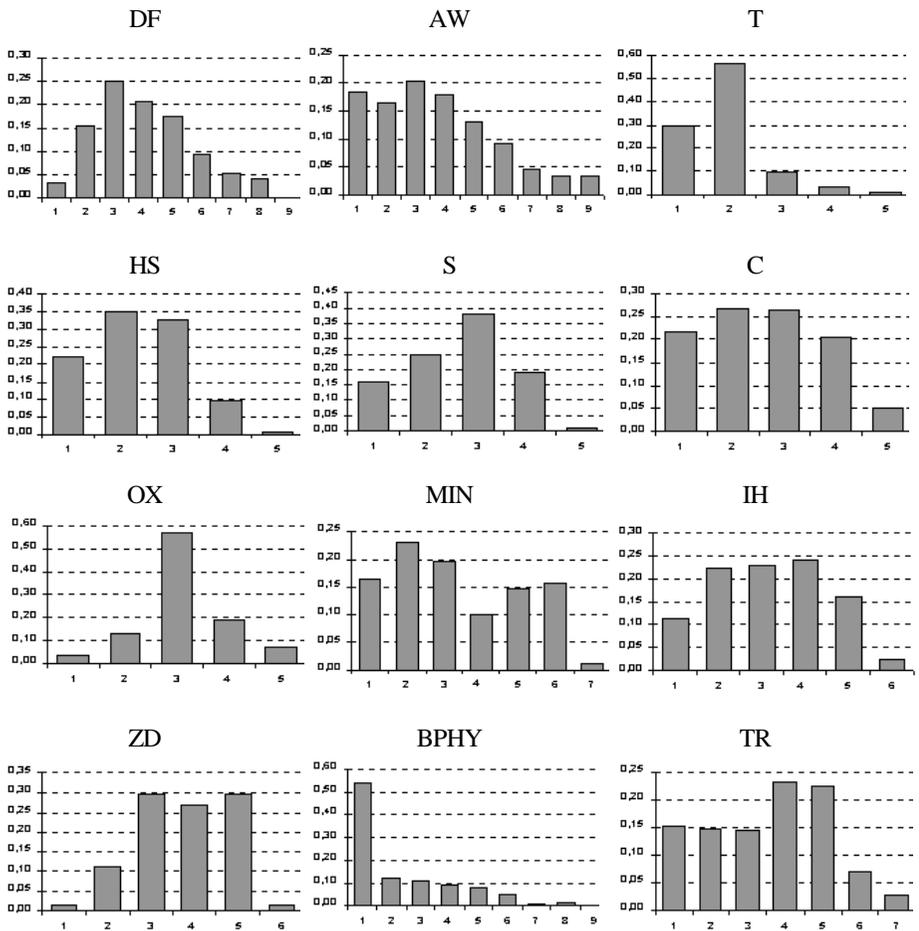
Сплошные линии – статистические связи на уровне функций распределения.

Пунктирные линии – статистические связи на уровне средних значений.

Обозначения переменных как в таблице 3.4.1

Все величины в базе знаний связаны между собой (рис. 3.4.1). Простейший вид связи – это формула, например, удельная площадь водосбора ( $DF$ ) представляет собой частное от деления площади водосбора ( $F$ ) на площадь озера ( $A$ ). Морфоэдафический индекс ( $MEI$ ) получается от деления общей минерализации воды в озере ( $MIN$ ) на его среднюю глубину ( $HS$ ). Относительная прозрачность ( $SS$ ) определяется как отношение прозрачности по диску Секки ( $S$ ) к средней глубине водоема ( $HS$ ).

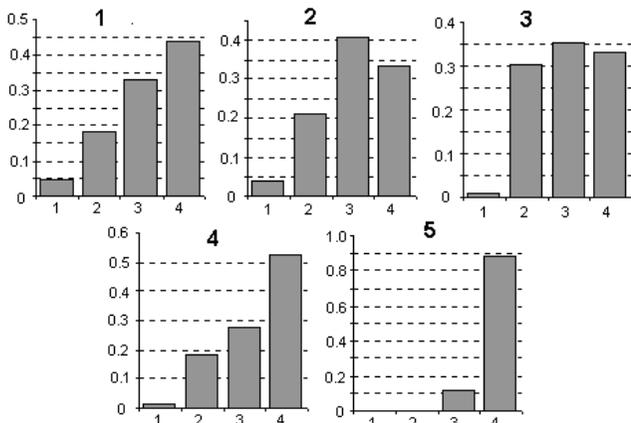
Исходным материалом базы знаний являются априорные функции распределения основных переменных (рис. 3.4.2). Эти функции распределения получены на основании обработки данных по всей совокупности исследованных водоемов. Как характеристики всего озерного региона такие функции распределения имеют вполне определенную ценность, но делать по ним какие-либо заключения для конкретного случая не представляется возможным.



**Рис. 3.4.2.** Априорные функции распределения основных переменных базы знаний.  
Обозначения переменных как в таблице 3.4.1

Попробуем решить простейшую задачу – например, оценить термическую характеристику озера (Т), зная в какой из ландшафтных зон оно находится (Z) и его среднюю глубину (HS). Для этого необходимо знать условные функции распределения термических типов озер по ландшафтным зонам и средним глубинам. Представление о виде этих функций дает рис. 3.4.3. Из данных этого рисунка, например, следует, что гипотермические озера в зоне тундры и северной тайги вообще не встречаются, а в зоне тайги отмечаются крайне редко. Более существенно термический тип озера зависит от его средней глубины.

Эпитермальные озера – это преимущественно мелкие озера, а гипотермальные – глубокие.



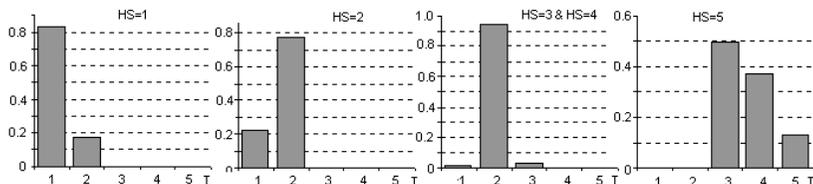
**Рис. 3.4.3.** Условные функции распределения термических типов озер (1 – эпитермальные, 2 – эпиметатермальные, 3 – метатермальные, 4 – метагипотермальные, 5 – гипотермальные) по ландшафтным зонам (1 – тундра, 2 – северная тайга, 3 – южная тайга, 4 – смешенный лес)

Преобразование априорных функций распределения в апостериорные (т.е. такие, в которых учитывается дополнительная информация об изучаемом объекте – аналог входного сигнала для конечного автомата) осуществляется при помощи формулы Байеса:

$$P(T_i | Z) = P(T_i) \frac{P(Z | T_i)}{\sum_{i=1}^5 P(T_i) \cdot P(Z | T_i)}$$

Здесь  $P(T_i)$  – это априорная функция распределения термических типов озер (рис. 3.4.1),  $P(Z|T_i)$  – условная функция распределения термических типов озер в какой-либо конкретной ландшафтной зоне, например, в зоне смешанных лесов ( $Z=4$ ). Заметим, что в отличие от формулы Байеса, приведенной в самом начале этого раздела, здесь в знаменателе стоит не произведение априорной вероятности на условную, а сумма таких произведений. Дело в том, что в первом случае мы имели дело с событием, которое могло случиться или не случиться (озеро может быть эвтрофным, а может и не быть), а сейчас мы имеем дело со случайной величиной, которая может принимать не два, а пять значений, поэтому в знаменателе вычисляется полная вероятность (подробности приведены в дополнении).

После двукратного применения формулы Байеса получаем апостериорные распределения термических типов озер для случая нахождения этих озер в зоне смешанных лесов и всех возможных градаций средних глубин (рис. 3.4.4). Для средних глубин от 4 до 16 м (HS=3 или HS=4) получается почти однозначное решение – с вероятностью 0.95 это будут эпиметатермические озера, у которых объем эпилимниона превышает объем гиполимниона во время летней стагнации.



**Рис. 3.4.4.** Апостериорные функции распределения термических типов озер для ландшафтной зоны смешанных лесов ( $Z=4$ ) в зависимости от средней глубины озера (HS)

Поскольку настоящий раздел посвящен применению дискретного подхода к построению лимнологических или экогидрологических экспертных систем и баз знаний, а не исследованию связей различных характеристик северных озер, то ограничимся приведенным выше примером и оставим в стороне интересные проблемы о том, какой объем информации необходим для установления трофического статуса водоема или как связывается рыбопродуктивность озера с другими его характеристиками. Заметим только, что созданная база знаний была проверена на материале, который заведомо не был использован для ее построения. Это озера Борисовское, Малое Луговое, Снетковское и др. на Карельском перешейке (Андронникова, Мокиевский, 1984). Физико-географические характеристики этих озер ( $Z, A, F, HS, C, S, MIN$ ) были закодированы согласно таблице 3.4.3, а такие характеристики как первичная продукция, биомасса бентоса и зоопланктона (ихтомасса, к сожалению, в этих озерах не определялась) были определены по базе знаний. С точностью до единицы принятых шкал эти данные совпали с данными непосредственных измерений.

Байесовский подход к построению баз знаний не является единственно возможным (Naylor, 1987; Mulawka, 1996). Перспективны методы, основанные на правилах логического вывода или самообучающиеся системы, которые здесь не рассматриваются. Основной смысл настоящего раздела заключается в том, что дискретный подход к представлению лимнологических и экогидрологических данных существенно облегчает построение экспертных систем и баз знаний в этих областях.

### 3.5 База знаний по материалам гидробиологических съездов

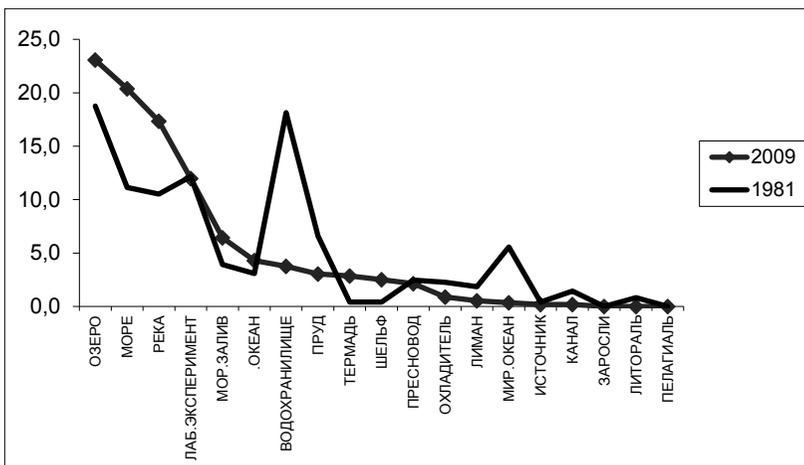
Настоящий раздел посвящен описанию и анализу баз данных, составленных по материалам тезисов III и IV съездов Всесоюзного гидробиологического общества (Рига, 1976 и Киев, 1981 годы), а так же X съезда Российского гидробиологического общества (2006 год, Владивосток). Идея создания таких баз данных принадлежит Г.Г. Винбергу, который предложил автору данной монографии создать такую базу к съезду в Киеве. Результаты были доложены на заключительном пленарном заседании, и вызвали большой интерес у участников съезда. Однако содержание этого доклада так и осталось не опубликованным. В настоящей главе эти материалы дополнены данными по тезисам гидробиологического съезда во Владивостоке в 2006 году. При этом, формат базы и ее структура были сохранены такими, какие они были разработаны для всесоюзных съездов. Это дает возможность объективной оценки изменений в отечественной гидробиологии, произошедших почти за 20-ти летний период.

По IV съезду база данных включала в себя 454 тезиса, а по X съезду 489 тезисов. Каждый тезис описывался в базе по 6 разделам:

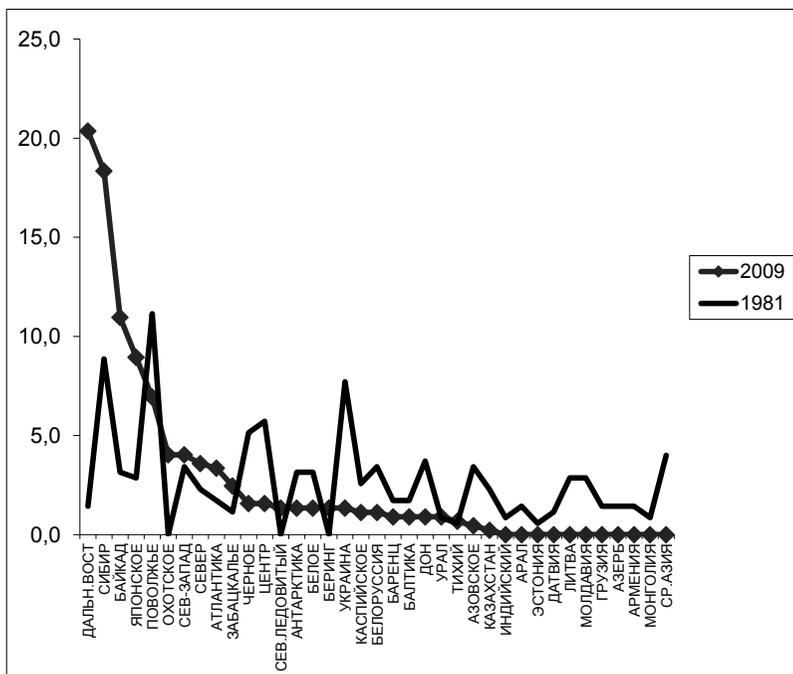
1. тип водного объекта, на котором производилось исследование,
2. географическое положение этого водного объекта,
3. таксономическая характеристика исследуемого гидробионта,
4. условия или внешние воздействия на исследуемый объект,
5. характеристики гидробионта, которые подвергались исследованию,
6. форма полученного результата исследования.

Каждый раздел включал в себя от 18 до 40 пунктов, названия которых приведены на рис. 3.5.1-3.5.6. Каждый пункт был представлен в базе в виде логической переменной, которая принимает значение 1 в случае наличия данного пункта в данном тезисе, и значение 0 в случае его отсутствия.

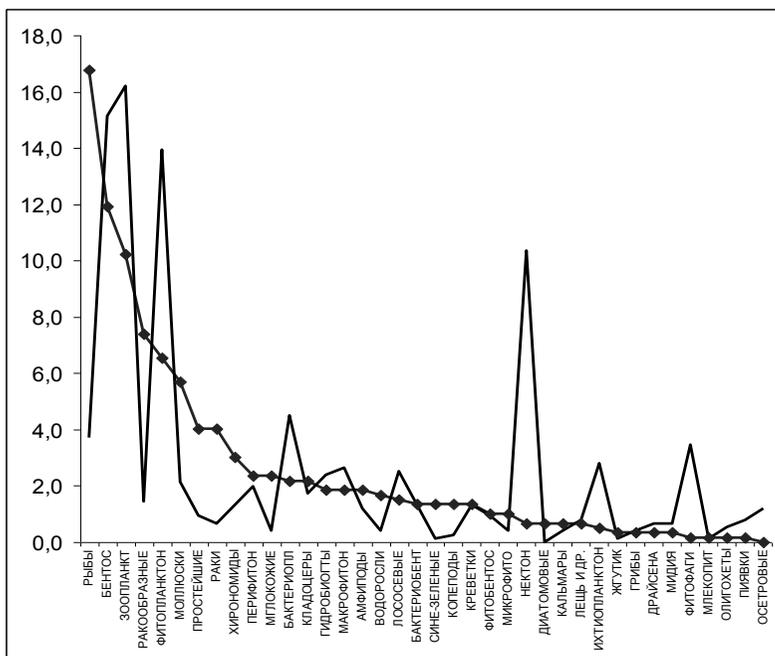
По данным рис. 3.5.1 наглядно видно, что в связи с распадом Советского Союза интерес гидробиологов к проблемам Мирового океана и водохранилищам снизился, но возрос по отношению к приграничным морям и рекам. Более наглядно эти изменения видны на рис. 3.5.2, из которого следует перенос интересов гидробиологов в сторону водоемов Сибири и Дальнего Востока. Конечно, в таком перераспределении сыграло роль место проведения съезда – Владивосток.



**Рис. 3.5.1.** Распределение типов водоемов, в которых проводились исследования, изложенные в тезисах IV (1981) и X (2009) съездов гидробиологического общества



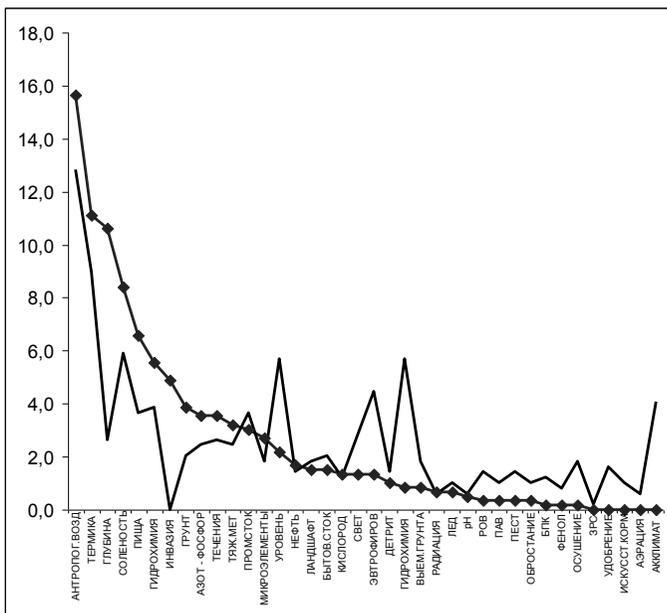
**Рис. 3.5.2.** Распределение географического положения водоемов, в которых проводились исследования, изложенные в тезисах IV (1981) и X (2009) съездов гидробиологического общества



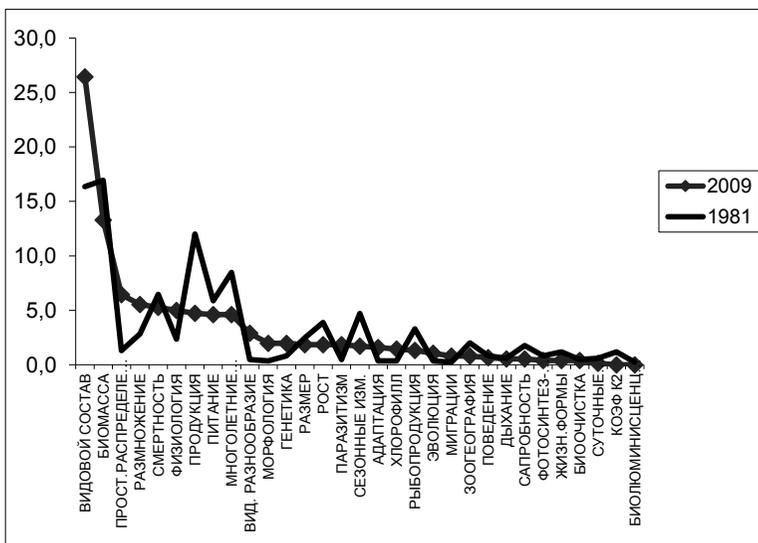
**Рис. 3.5.3.** Распределение объектов исследований, изложенных в тезисах IV (1981) и X (2009) съездов гидробиологического общества

В распределении работ по объектам исследования (рис. 3.5.3) можно отметить снижение интереса исследователей к изучению бактерий и нектона за счет снижения интереса к ракообразным. По отношению к внешним воздействиям (рис. 3.5.4) резко увеличилось число работ по инвазиям и сократилось число исследований по изучению влияния гидрохимии и колебаний уровня численности гидробионтов.

В выборе тематики исследований (рис. 3.5.5) интерес к описанию видового состава сохранился на высоком уровне, но число работ по определению продукции гидробионтов сократилось. Зато повысился интерес к описанию видового разнообразия. В остальном тематика работ в 1981 и 2009 годах сохранила свое распределение.

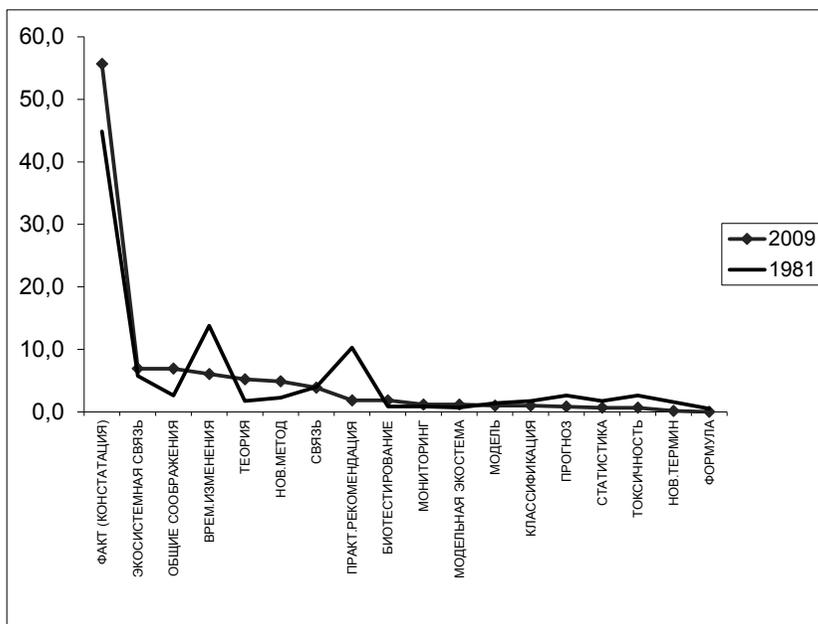


**Рис. 3.5.4.** Распределение внешних воздействий на объекты исследований, изложенных в тезисах IV (1981) и X (2009) съездов гидробиологического общества



**Рис. 3.5.5.** Распределение свойств объектов исследований, изложенных в тезисах IV (1981) и X (2009) съездов гидробиологического общества

По части тематической направленности исследований (рис. 3.5.6) изменения произошли в сторону увеличения применения новых методов и теоретических построений, однако число практических рекомендаций сократилось. В основном, как в 1981, так и в 2009 годах исследователи ограничивались констатацией наблюдаемых фактов и явлений.



**Рис. 3.5.6.** Распределение результатов исследований, изложенных в тезисах IV (1981) и X (2009) съездов гидробиологического общества

На рис. 3.5.7 представлен граф статистически значимых связей между ключевыми словами представленных тезисов, что в некоторой степени позволяет представить структуру гидробиологической науки, как единого целого. В пользу заключения о единстве гидробиологии свидетельствует тот факт, что граф на рис. 3.5.7. является связным, а не распадающимся на отдельные части. Исключения составляют только исследования макрофитов, которые оказались изолированными от основной массы исследований. По числу инцидентий ведущее место занимают вершины графа, соответствующая ключевым словам «моллюски» и «фитопланктон». Подобный граф связей для исследований 2009 года оказался принципиально похожим, на граф, приведенный на рис. 3.5.7, причем расхождение можно скорее объяснить не столько изменением структуры всей системы, а произволом авторов в выборе ключевых слов.





### 3.6 Модели экосистем озер, основанные на многолетних данных

В настоящем разделе рассматривается представление в виде конечного автомата данных многолетних мониторинговых наблюдений над динамикой водной экологической системы. В качестве первого примера выбрано небольшое дистрофное озеро Pieni Hientajarvi, расположенное на востоке Финляндии (Niinioja et al., 2002). Это небольшое озеро площадью в 2,4 га, поверхностью водосбора в 464 га, с максимальной глубиной 7 м, при средней глубине 3,5 м. Воды озера сильно окрашены гумусом, прозрачность по диску Секки колеблется от 0,6 до 2,8 м. Озеро практически не испытывает никакого антропогенного воздействия. Средние концентрации общего фосфора и азота в нем составляют от 6 до 32 мкг/л и от 180 до 430 до 32 мкг/л соответственно. В озере ежегодно отмечаются заморные явления.

По этому озеру опубликованы данные ежемесячных наблюдений с 1988 по 2000 гг., которые и послужили материалом для настоящей модели. В качестве входного сигнала целесообразно было рассматривать количество осадков в данном году, а состояние автомата оценивать по максимальной концентрации общего фосфора и хлорофилла «а». Данные по атмосферным осадкам (Prec) шкалировались по шести градациям от 60 до 180 мм/месяц, данные по максимальным значениям общего фосфора шкалировались по пяти градациям от 20 до 120 мкг/л, а данные по концентрации хлорофилла «а» по четырем градациям от 3 до 9 мкг/л. Шкалированные данные приведены в таблице 3.6.1.

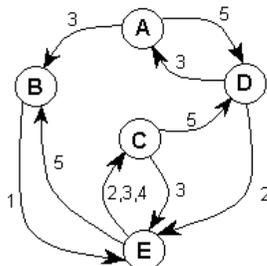
**Таблица 3.6.1.** Шкалированные данные о состоянии озера Pieni Hientajarvi с 1988 по 2000 годы

Год	Осадки	Максимальная концентрация общего фосфора	Максимальная концентрация хлорофилла «а»	Состояние автомата
1988	6	5	4	A
1989	3	4	4	B
1990	1	1	3	E
1991	3	3	3	C
1992	5	2	2	D
1993	3	5	2	A
1994	5	2	2	D
1995	2	1	1	E
1996	4	3	3	C
1997	3	1	2	E
1998	5	3	1	B
1999	1	1	2	E
2000	2	4	3	C

По существу, решалась задача синтеза автомата, по входному (осадки) и выходному (фосфор и хлорофилл) словам, состоящим из 13 символов. Подобные задачи имеют развитую теорию (например, Глушков (1962)), однако в данном случае привлечение сложного математического аппарата не имеет смысла из-за относительной краткости входного сообщения.

Выделим 5 характерных состояний экосистемы озера: А – высокие концентрации фосфора и хлорофилла, В – концентрации фосфора ниже максимальных, но выше средних, С – средние концентрации фосфора и хлорофилла, D – концентрации ниже средних, Е – низкие концентрации фосфора, хотя при этом концентрации хлорофилла могут изменяться от минимальных до средних.

Графоид автомата приведен на рис. 3.6.1. Видно, что это частичный автомат, поскольку многие комбинации состояний и входных воздействий за рассматриваемый промежуток времени не наблюдались. Однако все состояния синтезированного автомата оказались достижимыми. Характерной особенностью рассматриваемого автомата является отсутствие петель в структуре графоида. Это означает, что экосистема данного озера никогда не задерживается два года подряд в одном и том же состоянии.



**Рис. 3.6.1.** Графоид автомата, имитирующего динамику экосистемы озера Pieni Hientajarvi с 1988 по 2000 годы.

Дуги помечены шкалированными величинами атмосферных осадков

Матрица переходов в данном случае имеет вид (напомним, что исходные состояния соответствуют столбцам, а строки входным воздействиям, нулями отмечаются переходы, по которым нет данных):

$$Q(Q, Prec) = \begin{vmatrix} 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & C \\ B & 0 & E & A & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ D & 0 & D & 0 & B \end{vmatrix}$$

Из рассмотрения графоида и матрицы переходов видно, что при средних и низких значениях атмосферных осадков озерная экосистема озера имела тенденцию к колебаниям между состояниями С и Е. Только экстремально высокие значения входа ( $P_{res}=5$ ) выводит систему из этой области состояний.

Приведенный пример с почти предельно простой водной экосистемой показывает, что даже в таком случае временной ряд в 13 лет далеко не исчерпывает всех возможных комбинаций состояний и входных воздействий, которые позволили бы создать надежный аппарат для прогнозирования.

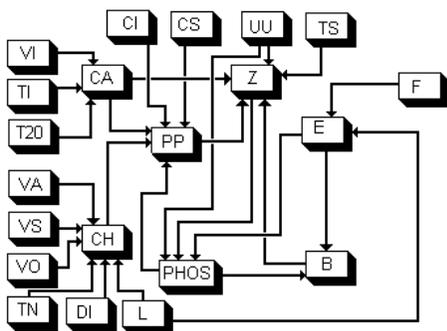
Существенно более сложным оказался автомат, имитирующий динамику экологической системы озера Дальнего (Камчатка), который базировался на 40-летнем временном ряде непрерывных наблюдений (Кругиус и др., 1987; Меншуткин, 1993).

Озеро Дальнее расположено в долине реки Паратунки и служит нерестилищем для дальневосточных лососей *Oncorhynchus nerka Walb.* Площадь озера 1.36 км<sup>2</sup>, площадь водосбора 11.3 км<sup>2</sup>, максимальная глубина 60.0 м, средняя глубина 31.5 м. Объем озера 42.8·10<sup>6</sup> м<sup>3</sup>, средний сток 11.3 10<sup>6</sup> м<sup>3</sup>. Озеро характерно четко выраженной термической стратификацией, отсутствием дефицита кислорода в гипolimнионе, прозрачностью воды от 4 до 6 м по диску Секки. Концентрация минерального фосфора в эпилимнионе колеблется от 3 до 6 мкг/л.

Первичная продукция колеблется от 120 до 220 гС м<sup>2</sup>/год. Проход производителей нерки колебался от 141 до 0.9 тысячи особей в год.

В основу создания автоматной модели были положены данные наблюдений с 1937 по 1977 годы. Модель представляла собой композицию из 7 автоматов: СА – полнота весеннего перемешивания, СН – полнота осеннего перемешивания, РР – первичная продукция, Z – биомасса зоопланктона, РНОС – концентрации неорганического фосфора, Е – численность нерестующей красной В – биомасса молоди красной.

Состояния автоматов СА и СН определялись на двухэлементных множествах, т.е. есть или нет полное весеннее или осеннее перемешивание. Автомат, описывающий концентрацию фосфора имел 5 состояний от концентрации ниже 3 мкг/л до выше 6 мкг/л. Первичная продукция и биомасса зоопланктона оценивались по трехбалльной шкале. Для численности нерестующей нерки пришлось выделить 7 градаций из-за варьирования этой величины в очень широких пределах. Биомасса молоди лососей в озере оценивалась по шестибалльной шкале.

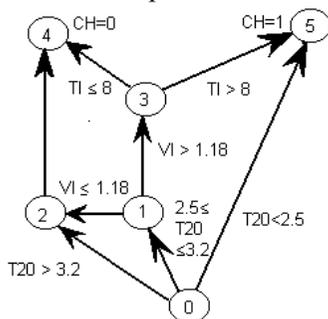


**Рис. 3.6.2.** Композиция автоматов, имитирующих динамику экологической системы озера Дальнего.

CA – полнота весеннего перемешивания, CH – полнота осеннего перемешивания, PP – первичная продукция; Z – биомасса зоопланктона, PHOS – концентрации неорганического фосфора, E – численность нерестующей красной, B – биомасса молоди красной. Входные переменные: VI – средняя скорость ветра в июне, TI – средняя температура воздуха в июне, T20 – температура воды в феврале на глубине 20 м, VA – средняя скорость ветра в августе, VS – средняя скорость ветра в сентябре, VO – средняя скорость ветра в октябре, TN – средняя температура воздуха в ноябре, DI – дата начала ледостава, L – уровень озера, CI – средний балл облачности в июле, CS – средний балл облачности в июле, UU – интенсивность стока в озеро, TS – среднегодовая температура воды в эпилимнионе, F – интенсивность промысла нерки

В виду громоздкости матриц перехода, функции переходов автоматов задавались в виде деревьев логических возможностей. Напомним, что деревом называется такой ориентированный граф, который не содержит циклов и имеет одну особую вершину («корень или основание дерева»), которая не имеет заходящих в нее дуг и из которой достижимы все остальные вершины графа.

На рис. 3.6.3 представлено дерево логических возможностей для автомата полноты весеннего перемешивания озера.



**Рис. 3.6.3.** Дерево логических возможностей для определения полноты весеннего перемешивания в озере Дальнем. VI – средняя скорость ветра в июне, TI – средняя температура воздуха в июне, T20 – температура воды в феврале на глубине 20 м

Перемещение по дереву логических возможностей начинается в основании (вершины 0 на рис. 3.6.3). Если температура воды в феврале на глубине 20 м была ниже  $2.5^{\circ}$ , то сразу можно было сделать заключение о том, что циркуляция этой весной будет полной ( $CA=1$ ). Связано это с тем, что при малом теплозапасе озера, вертикальная устойчивость водной массы снижается и даже при слабом ветре после вскрытия озеро ото льда наступает полная циркуляция с подъемом запасов биогенов из придонных в поверхностные слои озера.

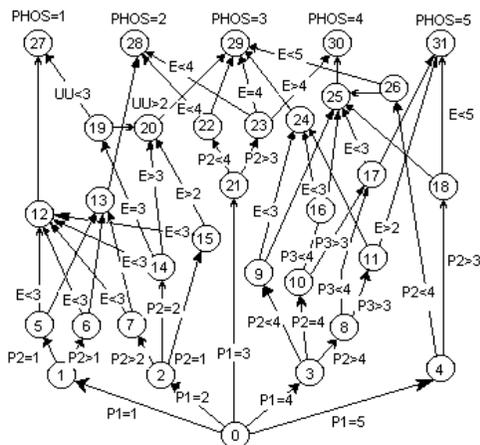
Если температура воды в феврале на глубине 20 м была заключена в пределах от  $2.5^{\circ}$  до  $3.2^{\circ}$ , то следовало еще выяснить ветровые условия в июне (вершина 1). Если средняя скорость ветра была ниже  $1.18$  м/сек., то циркуляция оказывалась неполной ( $CA=0$ ), в противном случае все определялось температурой воздуха в июне (вершина 3). Если средняя температура воздуха в июне превышала  $8^{\circ}$ , т.е. прогрев верхних слоев озера при обратной температурной стратификации проходил быстро, то перемешивание было полным ( $CA=1$ ). Если же весна (лед сходит на озере Дальнем в последних числах мая) была холодной, то наступление гомотермии затягивалось и перемешивание не было полным ( $CA=0$ ). Рассмотренная функциональная зависимость оправдывалась все 40 лет наблюдения на озере.

Аналогичным образом построено дерево логических возможностей для определения полноты осеннего перемешивания. В этом случае в качестве входных сигналов фигурируют средние скорости ветра в июле, сентябре и ноябре, а также температуры воздуха в эти месяцы и средний уровень озера в летний период текущего года.

На рис. 3.6.4 представлено дерево логических возможностей для автомата, определяющего концентрацию минерального фосфора в озере. В этом случае приходится учитывать запасы фосфора не только прошлого, но и позапрошлого года. Существенную роль в пополнении запасов фосфора в озере играет величина прохода нерке на нерест – дело в том, что продукты разложения трупов отмерших после нереста производителей играют существенную роль в фосфорном балансе озера. Влияние стока с водосбора (UU) играет роль только при очень низких концентрациях фосфора.

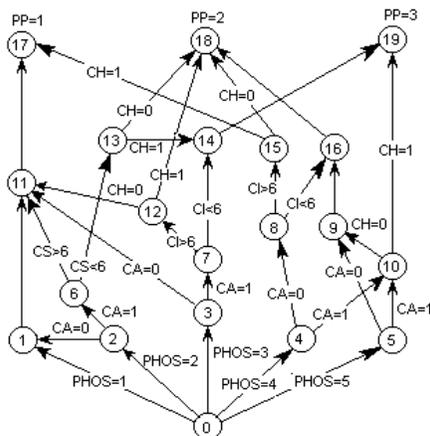
На рис. 3.6.5 представлено дерево логических возможностей для автомата первичной продукции. Помимо запасов фосфора и полноты весеннего и осеннего перемешивания, на величину первичной продукции оказывают средние баллы облачности в июле и сентябре. Конечно, влияние это не непосредственное, а через ослабление интенсивности солнечной радиации, достигающей поверхности воды. Поскольку регулярных актинометрических наблюдений на озере Дальнем не велось, то приходится использовать в модели косвенные связи.

Деревья логических возможностей для определения прохода производителей нерки на нерест, биомассы зоопланктона и молоди рыб принципиально выполнены по такой же схеме, как и уже рассмотренные и, поэтому не приводятся.



**Рис. 3.6.4.** Дерево логических возможностей для концентрации минерального фосфора в озере Дальнем.

PHOS – концентрация фосфора в текущем году, P1 – концентрация фосфора в прошлом году, P2 – концентрация фосфора 2 года назад, P3 – концентрация фосфора 3 года назад, E – проход производителей красной в прошлом году, UU – интенсивность стока в озеро в прошлом году



**Рис. 3.6.5.** Дерево логических возможностей для определения первичной продукции в озере Дальнем. PHOS – концентрация фосфора в прошлом году, CA – полнота весеннего перемешивания в текущем году, CH – полнота осеннего перемешивания в прошлом году, CI – средний балл облачности в июле в текущем году, CS – средний балл облачности в сентябре в текущем году

Поскольку наблюдения на озере Дальнем были прекращены, то для прогнозных целей рассматриваемая модель не могла быть использована. Однако при помощи этой модели были установлены существенные переменные системы и так называемые «предикторы» (Розенберг и др., 1994) которые определяют будущее системы. Одним из таких предикторов оказалась температура воды в феврале на глубине 20 м. Интересно, что температуры воды в подледных или придонных слоях озера таким свойством не обладают. Не менее существенным было обнаружение двухлетней «памяти» системы по запасам фосфора. Такие связи, как влияние величины нерестового стада нерки на запасы фосфора в озере или сложная периодичность в динамике численности популяции нерки были известны до создания модели и легли в ее основу.

Материал настоящего раздела призван показать не только приложимость технологии синтеза конечных автоматов к моделям водных экологических систем, но и важность длинных рядов наблюдений, без которых такой синтез невозможен.

## 4 Эколого-экономические модели

### 4.1 Модель управления водными ресурсами водохранилища

Материал настоящего раздела основан на переработке модели управления водохранилищем (Klekowski, Menshutkin, 2001), в которой использовался математический аппарат непрерывной логики. В данном случае применен аппарат конечных автоматов.

По сравнению с рассмотренными ранее моделями число состояний автоматов уменьшено до четырех, поскольку построение модели преследует исключительно иллюстративные цели. Схема композиции автоматов приведена на рис. 4.1.1. Неуправляемые входные переменные всей системы представлены количеством выпадающих осадков (PREC), средней температурой воздуха (TA) и средней скоростью ветра (WIND). Интенсивность испарения с поверхности водоема (EVA) определяется следующей матрицей:

$$EVA(TA, WIND) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Влияние испарения на уровень водохранилища (LL) имитируется следующим автоматом:

$$LL(L1, EVA) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

где L1 – положение уровня водохранилища в начале сезона. Вклад атмосферных осадков в приходную часть водного баланса водохранилища (LLL) описывается как:

$$LLL(PREC, LL) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

Заметим, что входная переменная PREC (интенсивность выпадения осадков) определена по 5-бальной шкале, в отличие от других переменных. Результирующий уровень воды (L2) определяется с учетом пропуска воды через плотину (U). Эта величина связана с количеством включенных турбоагрегатов (TURB)

$$L2(U, LLL) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Если все турбоагрегаты выключены (TURB = 0) то, L2 = LLL.

Количество выработанной электроэнергии (ENERGY) помимо величины срабатывания уровня (соотношение L1 и L2), зависит еще и от приходной части водного баланса. При большом количестве осадков даже при повышенном уровне (L2 > L1) можно вырабатывать электроэнергию:

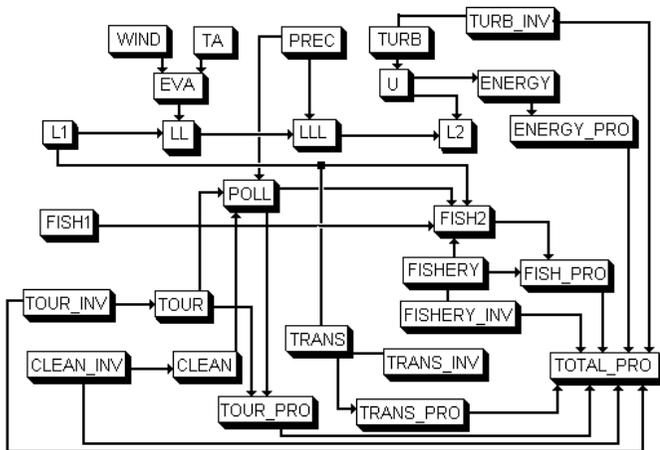


Рис. 4.1.1. Схема композиции автоматов в модели управления водными ресурсами водохранилища

$$\text{ENERGY}(L1, L2) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Однако, при малых осадках ( $\text{PREC} \leq 2$ ), для поднятия уровня приходится отключить все турбоагрегаты.

$$\text{ENERGY}(L1, L2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Степень загрязненности водоема ( $\text{POLL}$ ) имеет всего две градации:  $\text{POLL}=1$  – вода чистая и  $\text{POLL}=2$  – вода грязная. Степень загрязненности воды определяется развитием туризма ( $\text{TOUR}$ ) и количеством построенных очистных сооружений ( $\text{CLEAN}$ ). Если число выстроенных для туристов отелей меньше двух, то это вообще не влияет на качество воды. При увеличении количества отелей следует соблюдать норму – не менее одного очистного сооружения на три отеля, при превышении этой нормы наступает загрязнение водоема. При повышенном количестве осадков ( $\text{PREC}>2$ ) проточность водоема повышается, и он может очиститься.

Рыбные ресурсы водохранилища к концу года ( $\text{F2}$ ) определяются состоянием этих ресурсов в предыдущем году ( $\text{F1}$ ), степенью загрязненности водоема ( $\text{POLL}$ ) и интенсивностью вылова рыбы ( $\text{FISHING}$ ), которая имеет два состояния  $\text{FISHING}=1$  – любительское рыболовство,  $\text{FISHING}=2$  – промышленное рыболовство.

$$\text{FS}(\text{FISHING}, \text{POLL}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{F2}(\text{F1}, \text{FS}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Приведенные выше матрицы показывают, что высокие запасы рыбы могут сохраниться только при чистой воде и любительском рыболовстве.

Успешность использования водохранилища для нужд водного транспорта ( $\text{TRANS}$ ) определяется только сохранением высокого уровня воды.

Экономическая оценка успешности эксплуатации водохранилища определяется разностью, между полученными доходами ( $\text{PROFIT}$ ) и затратами

на содержание гидротехнических сооружений (TURB\_INV), инвестициями в строительство туристских отелей (TOUR\_INV), затратами на создание очистных сооружений (CLEAN\_INV), капиталовложениями в развитие водного транспорта (TRANS\_INV) и рыболовной промышленности (FISHING\_INV). Величины затрат полагаются линейными функциями от принятых состояний воздействий, превышающих единицу (исключение составляют отели и очистные сооружения, где отсчет начинается с единицы):

$$\text{TURB\_INV} = k \text{TURB} \times (\text{TURB} - 1)$$

$$\text{TOUR\_INV} = k \text{TOUR} \times \text{TOUR}$$

$$\text{CLEAN\_INV} = k \text{CLEAN} \times \text{CLEAN}$$

$$\text{TRANS\_INV} = k \text{TRANS} \times (\text{TRANS} - 1)$$

$$\text{FISHING\_INV} = k \text{TURB} \times (\text{FISHING} - 1)$$

Доходы от туризма определяются не только количеством построенных отелей (TOUR), но и степенью загрязненности водоема (POLL) и положением уровня воды (L2):

$$\text{TOUR\_PRO1}(\text{FISH2}, \text{POLL}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{TOUR\_PRO2}(\text{TOUR\_PRO1}, \text{L2}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{TOUR\_PRO} = q \text{TOUR} \times \text{TOUR} \times \text{TOUR\_PRO2},$$

где  $q \text{TOUR}$  – коэффициент доходности туризма.

Доходы от выработки электроэнергии полагаются линейно зависящими от количества выработанной энергии:

$$\text{ENERGY\_PRO} = q \text{ENERGY} \times \text{ENERGY}$$

где  $q \text{ENERGY}$  – относительная стоимость единицы электроэнергии.

Доходы от водного транспорта полагаются равными  $q \text{TRANS}$  только в случае успешной его работы (L2=4):

$$\text{TRANS\_PRO} = q \text{TRANS} \times (\text{TRANS} - 1)$$

Доходы от рыболовства  $q \text{FISHING}$  могут быть получены только в условиях чистой воды (POLL=1) и небольших колебаний уровня (L2 >= 3).

$$\text{FISHING\_PRO} = q \text{FISHING} \times (\text{FISHING} - 1)$$

Оценка общего дохода от эксплуатации водохранилища за  $n$  лет определялась по соотношению:

$$\text{TOTAL\_PRO} = \sum_{t=1}^n (\text{ENERGY\_PRO}(t) + \text{TOUR\_PRO}(t) + \text{TRANS\_PRO}(t) + \text{FISHERY\_PRO}(t)) - (\text{TURB\_INV} + \text{TOUR\_INV} + \text{TRANS\_INV} + \text{FISHERY\_INV})$$

Эксперименты с моделью могли проводиться при постоянных и случайных значениях входных переменных WIND, TA и PREC. В последнем случае распределение этих величин полагалось равномерным и некоррелированным.

Вид интерфейса программной реализации модели приведен на рис. 4.1.2.

Ниже приведены примеры изменения во времени структуры доходов (рис. 4.1.3) и структуры прибыли (рис. 4.1.4) при эксплуатации водохранилища.

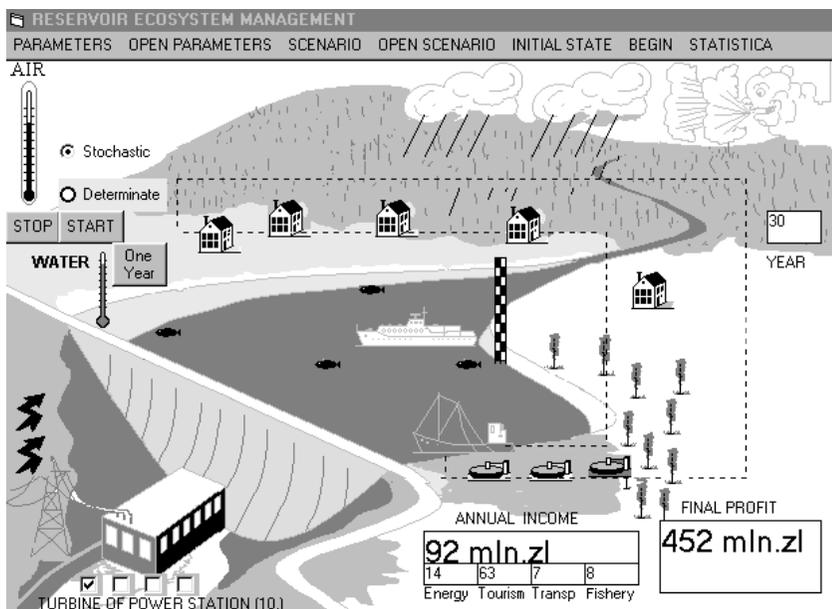


Рис. 4.1.2. Фрагмент интерфейса программной реализации модели управления водными ресурсами водохранилища

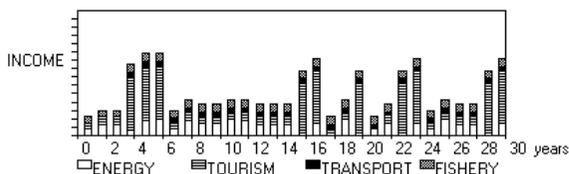
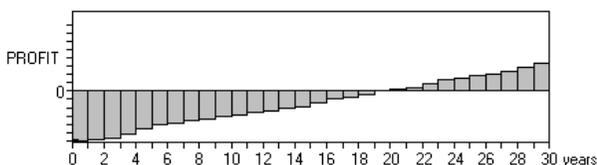


Рис. 4.1.3. Пример изменения во времени структуры доходов при эксплуатации водохранилища



**Рис. 4.1.4.** Пример изменения во времени структуры прибыли при эксплуатации водохранилища

## 4.2 Модель управления водными ресурсами реки Варты

Часть бассейна реки Варты в пределах Лодзинского воеводства является объектом действия проекта «Warta» (Bocian et al., 2001), цель которого состоит в сохранении природных водных ресурсов на территории водосбора путем инвестиций в постройку очистных и водозащитных сооружений. По существу, задача проекта сводится к попытке оптимального управления обширной и сложной эколого-экономической системой. Теоретические аспекты такого управления рассмотрены, например, в работе Klekowski и Menshutkin (2001), в которой показано, что необходимым этапом в этом деле является построение модели объекта управления. В настоящем исследовании от абстрактных построений делается переход к конкретному географическому объекту (Меншуткин, 2005).

При выборе конструкции модели создавалась альтернатива подробного математического описания биогеохимических циклов углерода, азота и фосфора в наземных и водных экосистемах, находящихся на исследуемой территории, или упрощенного их описания с сохранением основных черт ландшафтной структуры моделируемого региона. Был выбран второй путь, как более быстрый во времени и не требующий постановки специальных дорогостоящих полевых исследований. Это, конечно, не означает отказа от детального описания процессов, как это сделано в опубликованных модельных исследованиях (Dorge, 1994; Krysanova, Haberlandt, 2002). Более того, конструкция предлагаемой модели позволяет, не нарушая общую структуру модели, вводить уточнения в описание процессов преобразования и транспорта биогенных элементов в экосистемах леса и сельскохозяйственных угодий, движении грунтовых вод, процессов, происходящих на границе земель и водой (экотонах), а также в экосистемах рек и водохранилищ.

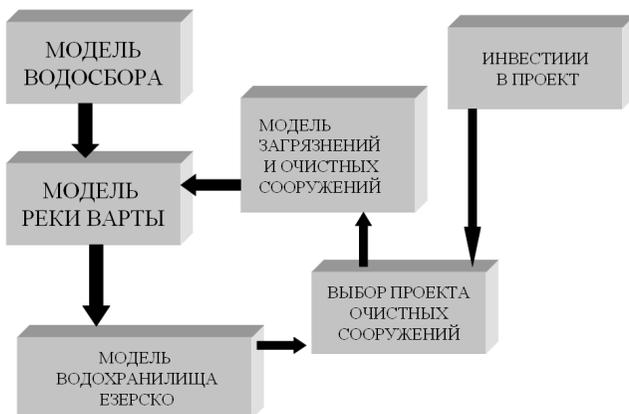
На рис. 4.2.1 приведена схема реки Варты с водохранилищем Езерско и притоками Пихна, Грабья, Олешница, Видавка, Красувка, Зеглина.



**Рис. 4.2.1.** Интерфейс программы управления реки Варты с водохранилищем Езерско и притоками Пихна, Грабия, Олешница, Видавка, Красувка и Жеглина. 1 – точный источник бытовых и промышленных стоков, 2 – очистное сооружение, 3 – небольшое водохранилище на водосборе, 4 – польдер

Постановка задачи исследования базируется на теоретических разработках Международного экологического центра ПАН (Menshutkin, Klekowski, 2001) и представления о том, что исследуемая часть водосбора реки Варта с водохранилищем Езерско представляет собой сложную динамическую систему, управление которой предусматривает применение элементов общей теории систем и оптимального управления (Straskraba, Tundisi, 1999).

Блок-схема процесса управления представлена на рис. 4.2.2. Управляемым входом исследуемой системы являются затраты на модернизацию уже существующих и постройку новых очистных сооружений и коммуникаций подвода к ним сточных вод. Из всех этих сооружений выделено 12 самых крупных с расходом воды более 500 м<sup>3</sup>/сут. Остальные сооружения разбиты на 6 групп по географическому признаку.



**Рис.4.2.2.** Общая блок-схема модели управления качеством воды в реке Варта

От включенной мощности очистных сооружений зависит количество фосфора и азота поступающих в систему. Кроме точечных источников, на которых распространяется действие систем очистки, в водосбор попадают азот и фосфор, приносимые грунтовыми водами и поверхностным стоком. Это воздействие на систему зависит как от ситуации в сельском хозяйстве (интенсивность внесения удобрений), так и от климатических условий.

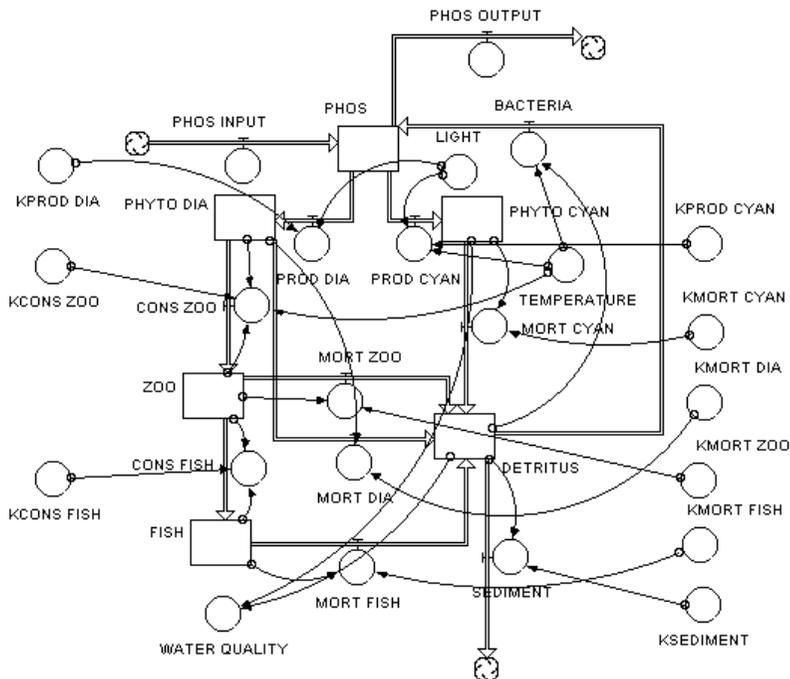
В речных экологических системах и в экосистеме водохранилища происходят процессы самоочищения, которые нельзя не учитывать.

Выходом исследуемой системы является качество воды в водохранилище Езерско.

Задача настоящего исследования заключается в установлении зависимости между инвестициями в постройку и модернизацию очистных сооружений и характеристиками качества воды в водохранилище Езерско. Оптимальное управление водными ресурсами реки Варты, согласно литературным данным (Рикун и др., 1991; Slota 1997), понимается в данном случае, как нахождение компромисса между минимальными затратами на постройку очистных сооружений, с одной стороны, и достижением максимально возможно высокого качества воды, с другой стороны. Конкретно это сводится к минимизации функционала  $K(R, E)$  представляющего сумму затрат на постройку и эксплуатацию очистных сооружений  $K_s(R)$  и ущерба от низкого качества воды  $K_w(R, E)$ , который в данном случае принимается пропорциональным максимальной биомассе сине-зеленых водорослей в водохранилище Езерско.

$$\mathbf{Min} K(R, E) = K_s(R) + K_w(R, E), \dots\dots\dots(4.2.1)$$

где R – совокупность мер, направленных на улучшение качества воды, E – природные условия.



**Рис. 4.2.3.** Блок-схема модели экосистемы водохранилища Езерско.

PHOS – концентрация неорганического фосфора, PHOS\_INPUT – поступление фосфора, PHOS\_OUTPUT – вынос фосфора, LIGHT – освещенность, PHITO\_DIA – биомасса диатомовых водорослей, PHITO\_CYAN – биомасса сине-зеленых водорослей, PROD\_DIA – продукция диатомовых водорослей, PROD\_CYAN – продукция сине-зеленых водорослей, KPROD\_DIA – коэффициент продукции диатомовых водорослей, KPROD\_CYAN – коэффициент продукции сине-зеленых водорослей, MORT\_DIA – отмирание диатомовых водорослей, MORT\_CYAN – отмирание сине-зеленых водорослей, KMORT\_DIA – коэффициент отмирания диатомовых водорослей, KMORT\_CYAN – коэффициент отмирания сине-зеленых водорослей, ZOO – биомасса зоопланктона, CONS\_ZOO – потребление пищи зоопланктоном, KCONS\_ZOO – коэффициент потребления пищи зоопланктоном, MORT\_ZOO – отмирание зоопланктона, KMORT\_ZOO – коэффициент отмирания зоопланктона, FISH – биомасса рыб, CONS\_FISH – потребление пищи рыбами, KCONS\_FISH – коэффициент потребления пищи рыбами, MORT\_FISH – смертность рыб, KMORT\_FISH – коэффициент смертности рыб, DETRITUS – масса детрита, SEDIMENT – седиментация, KSEDIMENT – коэффициент седиментации, TEMPERATURE – температура воды, WATER\_QUALITY – качество воды в водохранилище

Водоохранилище Езерско представляет собой ключевой элемент системы водосбора реки Варты в пределах Лодзинского воеводства. Именно по качеству воды в этом водоохранилище можно судить о благополучии или неблагополучии состояния всей рассматриваемой водной системы. Поэтому экологическая система водоохранилища Езерско как подмодель общей системы.

Водоохранилище Езерско (Wojtysiak, 1999) расположено между 484 и 504 км течения реки Варты и имеет максимальный объем  $202.5 \times 106 \text{ м}^3$  при уровне 121.5 м. Рабочий объем составляет  $172.6 \times 106 \text{ м}^3$  при срабатывании уровня до 116.0 м, мертвый объем составляет  $30.2 \times 106 \text{ м}^3$ . Максимальная площадь зеркала  $42.6 \text{ км}^2$ , минимальная 17.6 км. Средняя глубина может изменяться от 10.5 м до 4 м.

Состояние экологической системы водоохранилища определяется биомассой сине-зеленых водорослей (PHYTO\_CYAN), биомассой диатомовых водорослей (PHYTO\_DIA), биомассой зоопланктона (ZOO), ихтиомассой рыб – планктофагов (FISH), массой мертвого органического вещества, взвешенного в воде – детрита (DETRITUS), концентрациями неорганического фосфора (PHOS) в воде. Блок-схема подмодели водоохранилища Езерско приведена на рис. 4.2.3. Модель построена согласно с принципами, изложенными в разделе 2.4.1, поэтому остановимся только на некоторых ее особенностях.

Биомасса сине-зеленых водорослей возрастает в том случае, если имеется достаточная освещенность, а также высокие концентрации в воде минерального фосфора. Кроме того, следует отметить, что “цветение” (bloom) сине-зеленых водорослей может происходить только при температуре воды выше 10 градусов (Oliver, Gant, 2000). Биомасса диатомовых водорослей полагается зависящей, помимо световых условий и концентраций фосфора, так же и от биомассы зоопланктона. Потребление сине-зеленых водорослей зоопланктонными фильтраторами в модели не учитывается.

Прирост биомассы зоопланктона полагается зависящим от биомассы кормовой базы и давлению со стороны рыб-планктофагов, при этом учитывается, что с ростом температуры воды темп прироста биомассы зоопланктона увеличивается.

Изменение ихтиомассы рыб-планктофагов (в основном это молодь окуня, плотвы и ерша (Janiak, 1992; Wutek, 1993; Gornicki, 1994)) полагается зависящей от температуры воды и кормовых условий.

Содержание фосфора в воде водоохранилища определяется не только поступлением из рек и сливом через плотину, но и потреблением фосфора в процессе фотосинтеза диатомовыми и сине-зелеными водорослями. Масса

детрита полагается зависящей от интенсивности отмирания фитопланктона и потребления детрита бактериопланктоном.

По существу, весь смысл подмодели реки сводится к тому, чтобы формировать фосфорную нагрузку для подмодели водохранилища. Поэтому все переменные подмодели WARTA выражаются в виде концентраций неорганического фосфора в воде. Процессами фотосинтеза и самоочищения в русле реки, в первом приближении, пренебрегается, хотя они, несомненно, имеют место.

Гидрографическая сеть моделируемого района (рис. 4.2.1) представлена как множество резервуаров, которые соединены потоками. Так, Варта состоит из 19 элементов, Пихна из 6, Видавка из 10, Грабья из 8, Красувка из 4, Лисварта из 4, Олешница из 5, Жеглина из 3. Вход каждого последующего элемента является выходом предыдущего. В местах слияния рек элементы имеют два притока.

Реки Варта и Пихна впадают в водохранилище Езерско. Более мелкие речки во внимание не принимаются и их расходы включаются в поверхностный сток.

Перенос фосфора в процессе течения реки осуществляется путем передачи этих веществ из ячейки, лежащей выше по течению в следующую за ней ячейку, причем количество передаваемого вещества пропорционально расходу реки в данном месте. Для реки Видавки эти соотношения выглядят следующим образом. Например:

$$WID34 = WID3 \times V\_VID, \quad (4.2.2)$$

где  $V\_VID$  – расход воды в реке Видавки, который зависит от времени.

Поступление фосфора в реки от точечных источников имитируется в модели следующим образом (пример стока из очистных сооружений в районе Бельхатов):

$$\begin{aligned} WID4(t) = & WID4(t-dt) + \\ & (WID34 + WIDL4 + BELCHATOW - WID45 - SPW14) \times BELCHATOW = \\ & = BELCHATOW\_LOAD - BELCHTOW\_CLEAN, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

где  $BELCHATOW\_LOAD$  – интенсивность точечного источника загрязнения,  $BELCHATOW\_CLEAN$  – интенсивность очистки сточных вод от фосфора в результате действия очистных сооружений. Слив из очистных сооружений Белхатов осуществляется в  $WID4$  ячейку реки Видавка. При отсутствии очистных сооружений ( $BELCHATOW\_CLEAN = 0$ ) при любом состоянии Видавка выше места стока ниже стока вода в реке оказывается насыщенной загрязняющими веществами. При максимальной степени очистки ( $BELCHATOW\_CLEAN = BELCHATOW\_LOAD$ ) вода в реке вообще не претерпевает каких либо изменений. В промежуточных случаях происходит смешение сточных и речных вод.

Приведенный выше пример касался только стока с крупных очистных сооружений, подлежащих модернизации или постройке. Для мелких очистных сооружений, объединенных в группы по территориальному признаку, соотношения имеют аналогичный вид.

Поступление в реки фосфора с грунтовыми водами и поверхностным стоком определялось согласно результатам расчетов приведенных в отчете по польско-германскому проекту о диффузном поступлении биогенов в реки бассейна реки Одер (Okruszko, Dirsen, 1999) и включался в состав поступлений от распределенных источников.

Самостоятельный блок программы занимается поиском оптимального варианта принятия решения по первоочередному строительству или модернизации очистных сооружений, а также строительству новых водохранилищ на притоках Варты и созданию польдеров в долине реки. Поскольку каждый вариант такого решения является дискретной функцией, то применение классических методов поиска экстремума (в данном случае минимума), таких как градиентный метод или метод релаксации, в данном случае не представляется возможным. Дело осложняется еще и разрывностью функции стоимости инвестиций на постройку очистных сооружений от выбранного варианта. Исходя из этого был применен метод случайного поиска, который не накладывает никаких ограничений на гладкость и неразрывность аргументов (вариант постройки сооружений очистки стоков, водохранилищ и польдеров) и критерия оптимизации (минимум инвестиций при максимальном уровне качества воды).

Генерация текущего варианта постройки очистных сооружений, водохранилищ и польдеров осуществлялась при помощи обращения к датчику случайных чисел (*RND*), причем все возможные варианты от постройки всех сооружений одновременно, до полного отказа от инвестиций полагались равновероятными. Рассматривалось 12 вариантов постройки или модернизации крупных сооружений (*GI*), 6 вариантов групп мелких сооружений по районам (*GA*), 9 вариантов постройки водохранилищ (*RS*) и 3 варианта постройки польдеров (*PO*).

Для вычисления критерия оптимальности модель приводится в начальное состояние. Затем, с помощью датчика случайных чисел (*RND*), из базы данных выбирается массив значений расходов воды в реке Варте и ее притоках. К условиям выбранного года подбираются температурные и световые условия для модели экологической системы водохранилища Езерско. После одного года совместной работы модели реки Варты с притоками и водохранилища Езерско происходит поиск максимальных значений биомассы сине-зеленых водорослей

в водохранилище. Именно это значение и входит в критерий оптимальности в качестве оценки качества воды (с применением оператора логического отрицания, поскольку максимальным значениям биомассы сине-зеленых водорослей соответствует минимальное значение качества воды).

Второй компонент критерия оптимальности – инвестиции, подсчитывается путем суммирования затрат на постройку очистных сооружений, водохранилищ и польдеров для данного варианта.

$$K_s(R) = \sum_{i=1}^{12} GI(i) * \varphi(i) + \sum_{i=1}^6 AI(i) * \phi(i) + \sum_{i=1}^9 RS(i) * \gamma(i) + \sum_{i=1}^3 PO(i) * \omega(i), \quad (4.2.4)$$

где  $\varphi(i)$  – затраты на постройку или модернизацию  $i$ -го очистного сооружения,  $\phi(i)$  – затраты на постройку или модернизацию мелких очистных сооружений в области  $i$ ,  $\gamma(i)$  – затраты на постройку  $i$ -го водохранилища,  $\omega(i)$  – затраты на постройку  $i$ -го польдера.  $GI(i)=1$ , если постройка или модернизация  $i$ -го очистного сооружения включена в данный вариант проекта ( $R$ ), и  $GI(i)=0$ , если постройка или модернизация  $i$ -го очистного сооружения проектом  $R$  не предусмотрена. Аналогично определены функции  $AI(i)$ ,  $RS(i)$  и  $PO(i)$ .

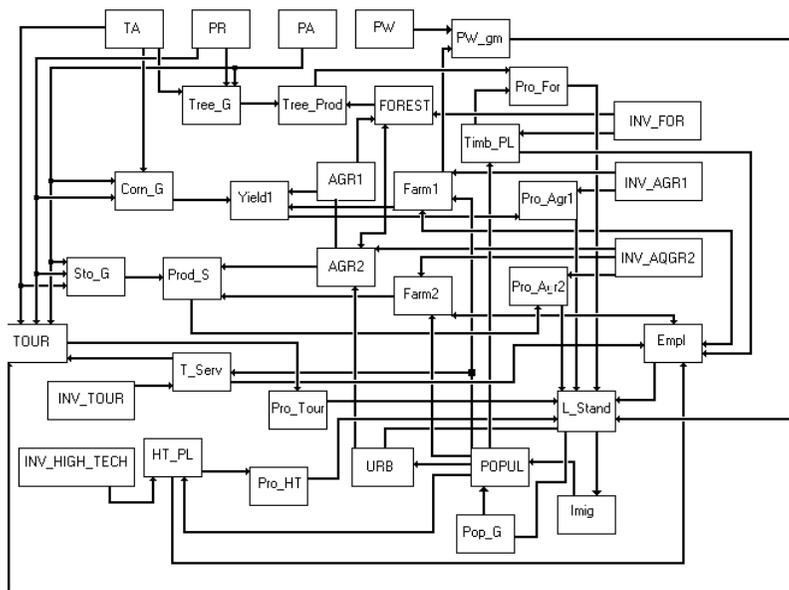
Поиск оптимального варианта начинается с задания начального варианта ( $R_0$ ) при помощи обращения к датчику случайных чисел. Для этого варианта вычисляется критерий оптимальности  $K(R_0, E)$ . Затем таким же образом задается следующий вариант проекта ( $R_1$ ) и вычисляется соответствующее значение критерия оптимальности  $K(R_1, E)$ . Если окажется, что  $K(R_1, E) < K(R_0, E)$ , то оптимальным полагается вариант проекта  $R_1$ , в противном случае  $R_0$ . Затем этот процесс повторяется, причем критерий оптимальности каждого нового варианта проекта ( $R_{k+1}$ ) сравнивается с наилучшим критерием оптимальности, достигнутым во всех предыдущих пробах. Если он больше наилучшего (в данном случае наименьшего) значения, то данные варианта проекта ( $R_{k+1}$ ) остаются без внимания и программа переходит к следующей пробе, если нет, то характеристики этого варианта проекта полагаются оптимальными к данному ( $k+1$ ) шагу процесса оптимизации. Число шагов, при котором поиски лучшего варианта теряют смысл, определяется экспериментально. В данном случае 1000 шагов оказывается достаточным для получения устойчивого решения.

Для гидрологических условий, подобных условиям, наблюдавшимся в 1992 году, оптимальная конфигурация проекта предусматривает первоочередную модернизацию очистных сооружений в Грабице, Щершуве и Ведлуне, а также строительство польдера 2 (ниже Сераджа). Строительство мелких очистных сооружений в первую очередь целесообразно в зоне 6 (река Пихна).

При принятых параметрах строительство малых водохранилищ оказывает малое влияние на качество воды в водохранилище Езерско и создает только локальные эффекты улучшения качества воды.

### 4.3 Эколого-экономическая модель развития гмины Чемерники

В основу предлагаемой модели были положены материалы Кафедры ландшафтных систем Люблинского Католического университета (зав. проф. И. Козак) и разработкам Клековского и Меншуткина (2001) по эколого-экономическому моделированию района Бещад. В данной модели использована только методическая часть этой работы, а структура модели и все функциональные зависимости приняты применительно к условиям гмины Чемерники, по результатам полевых работ Кафедры ландшафтных систем в 2002 году. Блок-схема модели приведена на рис. 4.3.1.



**Рис. 4.3.1.** Блок-схема модели. Объяснение символов в тексте

Состояние моделируемой системы определяется площадью занятой лесами (FOREST), пашнями (AGR1), лугами и выгонами (AGR2) и населенными пунктами (URB), кроме того в характеристику состояния системы входит оценка численности населения гмины (POPUL). Все переменные, характеризующие состояние системы, а также входные и промежуточные переменные описываются

цельми числами в диапазоне от 1 до 9. Это можно интерпретировать как шкалирование именованных величин, например, денежных инвестиций в «евро» или площадей в квадратных километрах, в безразмерном виде. Однако можно себе представить такую оценку как степень истинности некоторого высказывания в непрерывной логике (Klir, Folger, 1988). Временной шаг модели принят равным одному году.

Входные переменные (внешние воздействия на систему) делятся на две группы: неуправляемые и управляемые. К первым относятся температура воздуха (TA), атмосферные осадки (PR), выпадение загрязнений с атмосферными осадками и общее загрязнение воздуха (PA) и загрязнение поверхностных и грунтовых вод, поступающих на территорию гмины (PW). К управляемым внешним воздействиям относятся инвестиции в лесное хозяйство гмины (INV\_FOR), инвестиции в полеводство (INV\_AGR1), инвестиции в развитие животноводство (INV\_AGR2), а также возможные инвестиции в развитие туризма на территории гмины (INV\_TOUR) и инвестиции в создание предприятий современной высокой технологии на территории гмины (INV\_HIGH\_TECH) с использованием ее человеческих ресурсов с необходимым обучением. В последнем случае имеется предприятия по типу сборки электронного оборудования, разработке информационных технологий, которые не требуют крупных сырьевых ресурсов, а нуждаются лишь в относительно дешевой рабочей силе и, конечно, значительных инвестициях при наличии незагрязненной внешней среды (как, например, в Финляндии или на Огненной Земле (Ушуайя, Аргентина, личные наблюдения автора)).

Интенсивность прироста деревьев в лесах гмины (Tree\_G) определяется температурными (TA) условиями, а также количеством осадков (PR) и общей загрязненностью воздушной среды (PA). Продукция древесины (Tree\_Prod) зависит не только от интенсивности роста деревьев в данном году (Tree\_G), но и от площади, занимаемой лесами (FOREST). Развитие предприятий лесной промышленности на территории гмины (Timb\_PL) определяется инвестициями в этой области (INV\_FOR), а также наличием рабочей силы (POPUL). Доходы, получаемые от лесного хозяйства гмины (Pro\_For) определяются продукцией древесины (Tree\_Prod) и интенсивностью ее вырубки и переработки (Timb\_PL).

Развитие полеводства на территории гмины связано не только с созданием и совершенствованием соответствующей инфраструктуры (Fam1), но и с успешностью рост сельскохозяйственных культур (Com\_G) и площадью, занятой под посевы (AGR1). Доходы, получаемые от полеводства (Pro\_Agr1), определяются, связаны не только с полученным урожаем (Yield1), но и с инвестициями (INV\_AGR1), например, с расходами на внесение удобрений.

Доходы от животноводства (Pro\_Agr2) на территории гмины определяются развитием животноводческих ферм (Fam2), что требует соответствующих капиталовложений (INV\_AGR2). Кроме этого продукция животноводческого сектора (Prod\_S) связана с приростом массы сельскохозяйственных животных (Sto\_G), что в свою очередь, зависит от погодных условий и уровня загрязнения среды.

В модели предусмотрена возможность развития туризма на территории гмины (TOUR), причем имеется в виду в основном сельскохозяйственный туризм. Это связано с необходимостью инвестиций для создания инфраструктуры по обслуживанию туристов (T\_Serv). Кроме этого в модели учитывается, что на интенсивность потоков туристов влияют погодные условия и чистота природных вод на территории гмины. Доходы от туризма (Pro\_Tour) полагаются пропорциональными потоку туристов (TOUR).

Гипотетическое развитие предприятий высокой технологии на территории гмины (HT\_PL) связывается, в первую очередь, с высокими инвестициями в этой области (INV\_HIGH\_TECH), принимая во внимание людские ресурсы гмины и чистоту среды. Доходы от этой области (Pro\_HT) могут существенно влиять на уровень жизни (L\_Stand) населения гмины.

Уровень безработицы или обратная ей величина занятости (Empl) определяется соотношением населения гмины (POPUL) с развитием лесного хозяйства, полеводства, животноводства, обслуживания туристов и работой на предприятиях высоких технологий. Уровень жизни людей на территории гмины (L\_Stand) определяется не только уровнем занятости, но и уровнем доходности всех предприятий, расположенных на ней. Отток населения из гмины (Imig) полагается обратно-пропорциональным уровню жизни. Уровень рождаемости, естественного прироста населения (Pop\_G) поставлен в модели не только в зависимость от жизненного уровня населения, но и от чистоты окружающей среды, в первую очередь питьевой воды (PW\_gm).

Площадь, занятая под населенные пункты и приусадебные участки (URB), полагалась пропорциональной не только численности населения (POPUL), но и его уровню жизни (L\_Stand).

На рис. 4.3.2 и 4.3.3 приведены изображения интерфейса программной реализации модели при продолжительности исследования в 50 лет. Имеется возможность задания любой конфигурации во времени каждой из функций внешних воздействий. Результаты функционирования модели так же представляются в графической форме, причем можно высветить различные комбинации переменных, характеризующих состояние системы.

Начнем исследование созданной модели со стационарных состояний, при которых внешние воздействия не изменяются во времени. Результаты такого исследования приведены в таблице 4.3.1. Все данные нормированы по базовому варианту модели, при котором все входные переменные принимают среднее значение (5). Сценарий 2 соответствует крайне благоприятным условиям развития гмины без изменения объема инвестиций. Это означает, что за все исследованные 50 лет температура воздуха и количество осадков было таким, что обеспечивали максимальные приросты биомассы деревьев и сельскохозяйственных культур, а загрязнения окружающей среды были минимальными. Такие условия приводят к увеличению численности населения гмины и площади, занятой под населенные пункты, занятость населения увеличивается незначительно, но жизненный уровень повышается, а отток населения сокращается. Загрязнение природных вод на территории гмины так же снижается.

Условия сценария 3 диаметрально противоположны условиям сценария 2 – погодные условия крайне неблагоприятны в течение всего срока исследования и уровень загрязнения среды высок. Естественно, это ведет к сокращению численности населения, усиленной иммиграции и загрязнению вод.

Сценарий 3 соответствует возвращению к средним природным условиям при усиленных инвестициях в лесное хозяйство. Это ведет к увеличению площадей занятых лесом, незначительному (2%) росту населения и улучшению условий среды в самой гмине по сравнению с базовым вариантом.

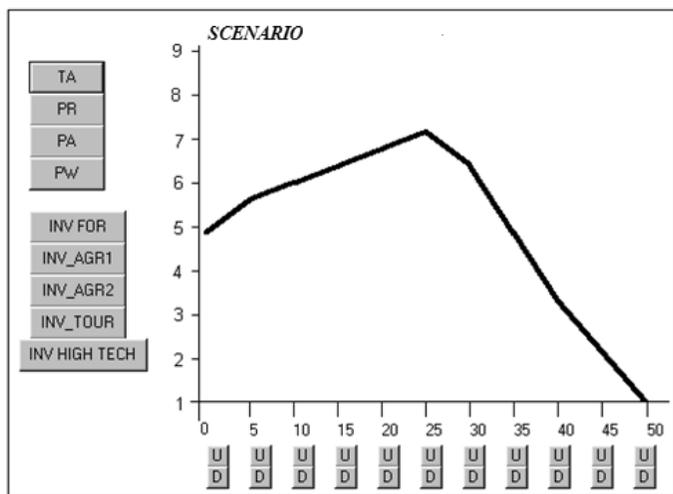
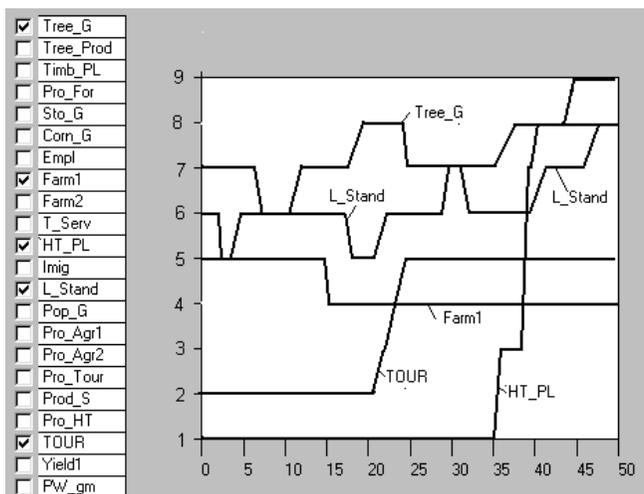


Рис. 4.3.2. Окно задания сценариев внешних воздействий на систему гмины



**Рис. 4.3.3.** Пример функционирования модели. На графике высвечиваются только те переменные модели, которые отмечены в меню

**Таблица 4.3.1.** Результаты исследования эколого-экономической модели гмины Чемерницы при постоянных во времени внешних воздействиях (NatInput – неуправляемый вход, AnInput – управляемый вход)

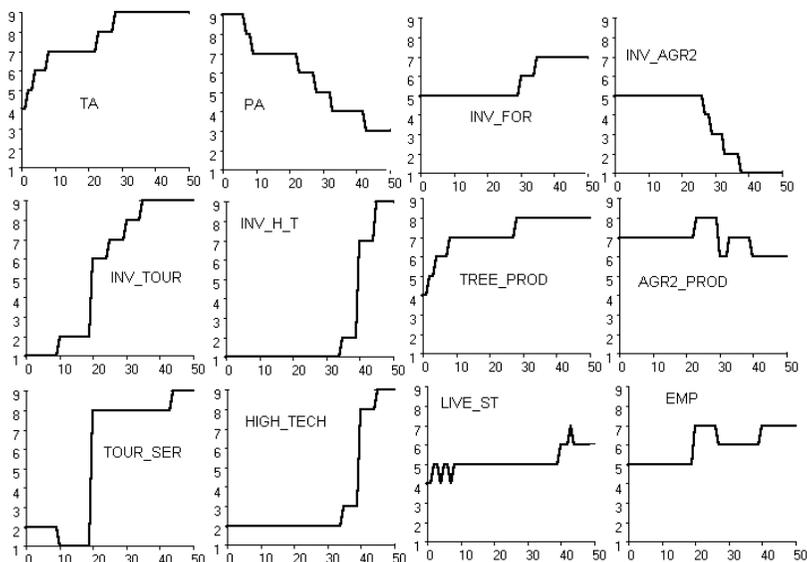
Scenario	1	2	3	4	5	6	7	8	9
NatInput	5555	9911	1199	5555	5555	5555	5555	5555	5555
AnInput	55511	55511	55511	93311	39311	33911	33391	33339	66679
FOREST	5	5	5	7	5	5	5	5	5
AGR1	6	6	5	3	7	6	6	6	6
AGR2	6	6	5	4	4	7	6	6	6
POPUL	6	6	5	6	6	6	6	6	7
URB	7	7	5	7	7	7	8	8	9
Empl	5	5	4	4	4	5	7	8	9
L_Stand	5	5	4	4	4	4	5	6	7
Imig	5	5	6	5	5	6	6	5	4
Pro_For	7	8	4	8	4	3	3	4	9
Pro_Agr1	7	8	5	4	8	4	5	4	8
Pro_Agr2	7	8	6	4	4	8	4	4	8
Pro_Tour	1	1	1	1	1	1	8	5	8
Pro_HT	1	1	1	4	1	1	1	8	9
PW_gm	5	5	6	4	5	5	7	5	7

Преимущественное развитие полеводства (сценарий 5) приводит к сокращению площадей, занятых лесом, но улучшению качества воды. Уровень жизни населения при этом сохраняется таким же, как и в базовом варианте.

Приоритетное развитие животноводства (вариант 6) ведет к росту населения гмины (9% от базового варианта), но жизненный уровень населения несколько снижается, а загрязнение среды возрастает.

Значительные инвестиции в развитие туризма с созданием развитой инфраструктуры (сценарий 7) ведет к росту площади лесов, уменьшению безработицы, но ухудшает качество воды в гмине за счет развития сервисных предприятий.

Крупные инвестиции в создание предприятий высокой технологии (сценарий 8) за 50 летний срок приводят к существенному росту благосостояния населения гмины при улучшении качества окружающей среды. Как побочное явление растет и туризм. Существенно возрастает занятость населения и площадь урбанизированных территорий.



**Рис. 4.3.4.** Пример функционирования модели.

ТА – средняя температура воздуха, PA – загрязнение воздушной среды, INV\_FOR – инвестиции в лесное хозяйство, INV\_AGR2 – инвестиции в животноводство, INV\_TOUR – инвестиции в туристический комплекс, INV\_H\_T – инвестиции в предприятия высоких технологий, TREE\_PROD – прирост древесины, AGR2\_PROD – продукция животноводства, TOUR\_SER – предприятия обслуживающие туризм, HIGH\_TECH – предприятия высоких технологий, LIVE\_ST – уровень жизни населения гмины, EMP – занятость населения

Наиболее благоприятным с точки зрения благосостояния жителей гмины является вариант (сценарий 9) гармоничного развития лесного и сельского хозяйства, туризма и высоких технологий (естественно при высоких инвестициях). Однако и этот вариант имеет недостаток в виде существенного ухудшения качества воды из-за интенсивного водопользования.

Созданная модель имеет предварительный характер, поскольку большинство функциональных связей в модели не имеют обоснованной привязки к конкретным условиям гмины Чемерники, а носят общий характер. Поэтому более подробное исследование модели, а тем более выбор оптимальной стратегии для развития гмины, следует отложить до конкретизации и уточнения зависимостей, положенных в основу модели. Опыт построения эколого-экономических моделей показывает, что это вполне достижимо (Umbach, 1989; White, 1996; Olinger et al., 1998).

## Заключение

В отличие от многочисленных по экологическому моделированию (Меншуткин, 2010) в настоящей монографии почти ничего не говорится о программной реализации рассматриваемых моделей. К этому есть, по крайней мере, две причины. Первая заключается в том, что, в принципе, программы для реализации конечных автоматов на компьютере довольно просты – вся экологическая информация сосредоточена в конструкции композиции автоматов и в матрицах их переходов. Все приведенные в настоящей книге модели реализованы на языке Visual Basic 6.0, но это совсем не означает, что они не могут быть реализованы при помощи других универсальных языков программирования (например, Delphi) или иных средств программного обеспечения (например, Excel).

Вторая причина заключается в возросшей компьютерной грамотности современного поколения экологов. Если в те времена, когда авторы начинали работы по экологическому моделированию (60-70 годы прошлого века) применение компьютеров в экологических исследованиях было из ряда вон выходящей экзотикой, а полезность и перспективность применения компьютерных технологий в экологии приходилось доказывать, то в настоящее время эколог, не владеющий основами этих технологий, является не менее экзотическим явлением.

Теперь о центральной идее этой книги – о приложимости понятия дискретности и аппарата конечных автоматов к экологическим исследованиям. Пожалуй, самым бесспорным, очевидным и плодотворным оказалось индивидуальное (individual-based) моделирование, в котором дискретность особей достаточно

очевидна (раздел 3.2). Это направление в последнее время развивается достаточно интенсивно (Uchmanski, Grimm, 1996), но почти исключительно на уровне популяций и, реже, сообществ. На экосистемном уровне идее дискретности повезло меньше. Введение Бернардом Паттеном понятия энвирона – дискретной единицы окружающей среды (Patten, 1982) развито в свое время не было и заметного влияния на развитие экологического моделирования не оказало.

Новый импульс к использованию идеи дискретности в экологическое моделирование заключался в попытках привлечения методов искусственного интеллекта к решению экологических проблем (Salski, 1992). В этом случае представление о дискретности экологических понятий фигурировало уже не изолированно, как у Паттена, а в неразрывной связи с идеей нечеткости или размытости. Именно в подобном синтезе видна перспектива развития экологического моделирования. Этот путь направлен на решение конкретных проблем охраны окружающей среды, а также оптимальных компромиссов между противоречивыми требованиями развития экономики и сохранения разнообразия живой природы.

**«По мере роста сложности системы постепенно падает наша способность делать точные и в то же время значащие утверждения относительно ее поведения, пока не будет достигнут порог, за которым точность и значимость (или реалистичность) становятся почти что взаимоисключающими характеристиками»** (Zadeh, 1965).

**Благодарность.** Автор считает своим долгом выразить глубокую благодарность Т.Р. Мининой за подготовку рукописи к печати.

## Литература

- Авакян А.Б., Асарин А.Е. 1998. Опыт экологизации уровненного режима водохранилищ (на примере Ивановского) // Пространственная структура и динамика распределения рыб в пресноводных водоемах. Ярославль. С. 71-83.
- Аксютина З.М. Элементы математической оценки результатов наблюдений в биологических и рыбохозяйственных исследованиях. Пищевая Промышленность. М. 1968.
- Айзерман М.А., Гусев Л.А., Розоноэр Л.И., Смирнова И.М., Таль А.А. 1963. Логика. Автоматы. Алгоритмы. М.: Физматгиз.
- Алимов А.Ф. 2000. Элементы теории функционирования водных экосистем. Труды ЗИН 283. СПб.
- Андронникова И.Н., Мокиевский К.А. (ред.) 1984. Особенности формирования качества воды в разнотипных озерах Карельского перешейка. Л.: Наука. 298 с.
- Баканов Ф.И. 2000. О некоторых методологических вопросах применения системного подхода для изучения структур водных экосистем // Биология внутренних вод. № 2. 5-19.
- Баранов Ф.И. К вопросу о биологических основаниях рыбного хозяйства // Известия отдела рыболовства и промысловых исследований. Петроград, 1918. С. 44-120.
- Берж К. Теория графов и ее применение. М.ИЛ. 1962.
- Бульон В.В., Винберг Г.Г. 1981. Соотношение между первичной продукцией и рыбопродуктивностью водоемов // Основы изучения пресноводных экосистем. ЗИН. Л. С. 5-10.
- Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Наука. 1980.
- Винберг Г.Г. Основы изучения пресноводных экосистем. Наука. 1981.
- Винберг Г.Г., Меншуткин В.В. Значение математического моделирования для разработки научных основ рационального использования биологических ресурсов пресных вод // Проблемы долгосрочного прогнозирования биологических исследований. ЗИН. Л. 1974. С. 25-44.
- Гилл А. Введение в теорию конечных автоматов. М. Наука. 1966. 272 с.
- Глушков В.М. 1962. Синтез цифровых автоматов. Физматгиз. М.
- Грезе В.Н. 1967. Темпы продукции в популяциях пелагических амфипод в Байкале // В кн: Круговорот вещества и энергии в озерных водоемах. М.: Наука. С. 182-191.
- Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. Л. 1976.
- Жаков Л.А. О приспособительном значении размерной и возрастной структуры популяций окуня в малых озерах Карельского перешейка // Труды Карельского отд. ГОСНИОРХ. Т.5, вып. 1. 1967. С. 324-330.
- Жаков Л.А. Формирование и рыбное население озер Северо-Запада СССР. Наука. 1984.
- Иванов В.В. 1978. Чет и нечет. Асимметрия мозга и знаковых систем. Кибернетика. М.: Советское Радио. 184 с.
- Иванова М.Б. 1985. Продукция планктонных ракообразных в пресных водах. Л. ЗИН АН СССР. 222 с.
- Ивлев В.С. 1955. Экспериментальная физиология питания рыб. М.: Пищепромиздат. 252 с.
- Ивлева И.В. 1981. Температура среды и скорость энергетического обмена у водных животных. Наукова Думка. Киев. 232 с.
- Казанцева Т.И., Смирнова Т.С. 1996. Зоопланктон центрального района Ладожского озера (имитационное моделирование). Изд. Института эволюционной физиологии и биохимии РАН, СПб. 58 с.

- Карпевич А.Ф. 1975. Теория и практика акклиматизации водных организмов. М. 432 с.
- Китаев С.П. 1984. Экологические основы биопродуктивности озер различных природных зон. Наука. Л. 206 с.
- Крогиус Ф.В., Крохин Е.М., Меншуткин В.В. 1987. Тихоокеанский лосось – нерка в экосистеме озера Дальнего (Камчатка). Л. : Наука. 198 с.
- Ляпунов А.А., Багриновская Г.И. 1975. О методологических вопросах математической биологии. Математическое моделирование в биологии. М.: Наука. С. 5-18.
- Мак-Кинси Дж. 1969. Введение в теорию игр. М.: Физматгиз.
- Мелихов А.Н. 1971. Ориентированные графы и конечные автоматы. М.: Наука.
- Меншуткин В.В. 1967а. Популяция рыб как конечный автомат // Заика В.Е. (ред.) Структура и динамика водных сообществ и популяций. Наукова Думка, Киев. С. 167-175.
- Меншуткин В.В. 1967б. Рациональное использование природных ресурсов озера // Круговорот вещества и энергии в озерных водоемах. Наука. М. С. 315-328.
- Меншуткин В.В. 1972. Моделирование процессов изучения и эксплуатации озерной экологической системы // Журнал общей биологии, т **33** (1). С. 15-20.
- Меншуткин В.В. 2010. Искусство моделирования. Физиология, экология, эволюция. СПб. 419 с.
- Меншуткин В.В., Клековски Р.З. 2001. Эколога-экономическая модель развития региона, основанная на экспертных оценках (на примере горного района Бещад, Польша) // Известия РАН, серия биологическая №4. С. 507-512.
- Монаков А.В. 1976. Питание и пищевые взаимоотношения пресноводных копепоид. Л.: Наука. 170 с.
- Оре О. 1968. Теория графов. М.: Наука.
- Очков В.Ф., Рахаев М.А. 1995. Этюды на языках Qbasic, QuickBasic, Basic Compiler. Финансы и статистика. М. 366 с.
- Рикун А.Д., Черняев Ф.М., Ширяк И.М. 1991. Методы математического моделирования в оптимизации водохозяйственных систем промышленных регионов. Наука. М. 160 с.
- Розенберг Г.С., Шитиков В.К., Брусиловский В.К. 1994. Экологическое прогнозирование (функциональные предикторы временных рядов). Тольятти. 186 с.
- Тутубалин В.Н., Барбашева Ю.М., Григорян А.А., Девятков Г.И. 1999. Математическое моделирование в экологии: историко-методологический анализ. М. Языки русской культуры. 208 с.
- Цетлин М.Л. 1970. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М. : Наука.
- Alonso D., Sole R.V. 2000. The DivGame Simulator: a stochastic cellular automata model of reinfrest dynamics // Ecological Modelling, **133**(1-2). Pp. 131-141.
- Balster H., Broun P.W., Kobler W. 1998. Cellular automata model for vegetation dynamics // Ecological Modelling, **107**(1-2). Pp. 113-125.
- Biverton R.J., Holt S.J. 1957. On the dynamics of exploited fish populations. London.
- Bocian J., Jurczynska-Kret Z., Kosinski J. Zalewski M (Ed.) 2001. Program regionalny Warta (synteza). 57p.
- Czaran T. 1998. Spatiotemporal models of population and community dynamics. Chapman & Hall. London. 284 p.

- Dorge J. 1994. Modelling nitrogen transformations in freshwater wetlands. Estimating nitrogen retention and removal in natural wetlands in relation of their hydrology and nutrient loading // *Ecological Modelling*, **75/76**. Pp. 409-420.
- Gorinicki K. 1994. Sukcesyjne zmiany w zespólach narybkowych i zooplanktone w Zbiorniku Jziersko w latach 1990-1993 i ich wplyw na jakosc wody. Praca magisterska pod kierunkiem prof.M.Zalewskiego. Lodz.
- Janiak J. 1992. Struktura zgrupowan oraz pokarm narybky Zbiornika Jeziersko w latach 1990-1991. Praca magisterska pod kierunkiem prof. M. Zalewskiego. Lodz.
- Janikowski R. 1993. Wielokryterialny model decyzyjny jako narzedzie oceny oddziaływania projektowanej dzialalnosci czlowieka na srodowisko. Instytut Ekologii Terenow Przemyslowionych. Katowice. 138 p.
- Jorgensen S.E. 1986. Fundamentals of Ecological Modelling. Elsevier, Amsterdam.
- Kajak Z. (Ed.) 1983. Ekologiczne podstawy zagospodarowania Wisly i jej darzecza. PWN, Warszawa – Lodz. 594p.
- Kajak Z. 1998. Hydrobiologia – Limnologia. PWN, Warszawa. 353p.
- Karafyllidis I., Thanailakis A. 1997. A model for predicting forest fire spreading using cellular automata // *Ecological Modelling*, **99**(1). Pp. 87-97.
- Klekowski R.Z., Mienszutkin V.V. 1996. Modelowanie matematyczne procesow ekologicznych.
- Krysanova V., Haberlandt U. 2002. Assessment of nitrogen leaching from arable land in large river basins. *Ecological Modelling*, **150**(3): 255-275.
- Keller R.H., Dungan J.L. 1999. Meta-modelling: a knoweledge-based approach to facilitating process model construction and reuse // *Ecological Modelling*, **119** (2-3). Pp. 89-116.
- Lembach M. 1994. Expert system – model coupling with the framework of an ecological advisory system // *Ecological Modelling*, v.**75/76**. Pp. 589-600.
- Manly B.F.J. 1998. Randomization, Bootstrap and Monte-Carlo methods in biology. Chapman and Hall. 400 p.
- May R.J. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature*, **261**. 459-471.
- Mienszutkin V.V., Klekowski R.Z., 2001. Optimal management of the dam reservoir ecological system. *Ecohydrobiology & Hydrobiology*. **4**. 435-440.
- Mulawka J.J. Systemy ekspertowe. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa. 235 p.
- Naylor C. 1987. Build your own expert system. J. Wiley&Sons. Chichester. 286 p.
- Niinioja R., Halopainen A.L., Ramo A. 2002. Seasonal water quality variation in two pristine headwater lake boreal coniferous area, eastern Finland // *Verh. Internat. Verein. Limnol.* **28**, 492-496. Stuttgart.
- Olinger S.V., Aber J.D., Fedores C.A. 1998. Estimating regional productivity and water yield using an ecosystem model linked with GIS // *Lands and Urban Planning*, **13**(5). Pp. 223-234.
- Oliver R.L., Gant G.G. 2000. Freshwater blooms // *The ecology of Cyanobacteria: their diversity in time and space* (Ed. Whitten S.A., Potts M.). Kluwer Academic Publ. Pp. 149-104.
- Poltorak T., Godlewska M., Klekowski R. 1997. Prognostic model of the Solina and Myczkowce dam reservoirs ecosystem – a project description // *Selected ecological problems of Polish-Ukrainian Carpathians. Proceedings of the scientific session the International Centre of Ecology*. Pp. 35-40.

- Ponyi J.T., Peter H.H. Zankai N.P. 1982. Daily changes in population structure and production of *Eudiaptomus gracilis* (G.O. Sars) during summer in shallow lake (Balaton, Hungary) // *Journal of Plankton Research*, **4**(4). Pp.913-926
- Pribram K. 1975. *Brain's Languages*. McGraw Hill, NY
- Prus T., Prus M., Bijok P. 1999. Diversity of invertebrate fauna in littoral of shallow Myczkowce dam reservoir in comparison with a deep Solina dam reservoir // *Hidrobiologia*, **408/409**. Pp. 203-210.
- Raciecka I. 1997. Działalność akredytowanego laboratorium wojewódzkiego inspektoratu ochrony środowiska // *Raport o stanie środowiska w województwie Sieradzkim w latach 1995/1996*. Sieradz. Pp. 9-26.
- Ricker W.E. Stock and Recruitment // *Canadian J. Fisheries*. 1954. 11(5). Pp. 28-67.
- Rios S. *Decision Theory and Decision Analysis: Trends and Challenges*. Kluwer Academic Publication. Boston.
- Salencon M.J., Thebault J.M. 1996. Simulation model of mesotrophic reservoir (Lac de Pereloup, France) MELODIA, an ecosystem reservoir management model // *Ecological modelling*, v. **84**(1-3). Pp. 163-187.
- Salski A. 1992. Fuzzy knowledge-based model in ecological research // *Ecological Modelling*, **63**(1-4). Pp. 103-112.
- Sienkiewicz P. 1994. *Analiza systemowa – Podstawy i metodologia*. Bellona. Warszawa.
- Slota H. 1997. *Zarządzanie systemami gospodarki wodnej*. Instytut Meteorologii i gospodarki wodnej. Warszawa. 130 p.
- Straskraba M., Tundisi J.G. 1999. *Reservoir Water Quality Management // Guidelines of Lake Management*. V. **9**. Shiga. Japan.
- Tarczyńska M. 1998. *Przyczyny powstawania toksycznych zakwitów sinicowych w Sulejowskim zbiorniku zaporowym i ich wpływ na wysejansowanych przedstawicieli biocenozy wodnej*. Rozprawa doktorska. Promotor M. Zalewski. Łódź.
- Timchenko O.V. 2001. *Ecological and hydrological investigation of Sulew Reservoir*. Kiev National University, geographical division. Kiev. 25 p.
- Uchmanski J. *Klasyczna ekologia matematyczna*. Warszawa. 1992.
- Uchmanski J., Grimm V. 1996. Individual-based modelling in ecology: what make the difference? // *Trends in Ecol. & Evol.* **10**, 437.
- Umbach E. 1989. Socio-economic system as causal factors in dynamics of ecosystem // *Ecological Modelling*. **43**(3-4). Pp. 305-310.
- Volterra V. 1931. *Lecons sur la Theorie Mathematique de la lutte la Vie*. Paris.
- Weglenska T. 1968. Wpływ naturalnego pokarmu na rozwój i produkcję zooplanktonu // *Ecologia Polska, Seria B*, **14**. Pp. 271-277.
- Whitehead A.N. 1969. *Process and Reality*. NY
- White D.H. 1996. Modelling agricultural and pastoral systems under environmental change // *Ecological Modelling*, **86** (2-3). Pp. 213-217.
- Wojtyśiak M. *Wpływ czynników hydrochemicznych na strukturę biotyczną zbiornika Jezioro*. Praca magisterska. Wykonana pod kierunkiem prof. M.Zalewskiego. Lodz. 1999.
- Wolfram S. 1984. *Theory and application of Cellular Automata*. Advanced Series on Complex System. World Sci. Publ. Singapore.
- Zadeh L. 1965. Fuzzy sets // *Information and Control*. Vol. 8, Issue 3. June 1965. Pp. 338-353.

## Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>1 Аппарат дискретного моделирования</b> . . . . .	6
1.1 Первое знакомство с дискретным моделированием . . . . .	6
1.2 Теория множеств и теория графов . . . . .	11
1.3 Дискретные случайные величины . . . . .	17
1.4 Размытые множества и нечеткая логика . . . . .	23
1.5 Конечные автоматы . . . . .	29
1.6 Теория исследования операций . . . . .	42
<b>2 Модели популяций и сообществ</b> . . . . .	47
2.1. Простейшая модель популяции рыб . . . . .	47
2.2 Модель популяции с представлением особи как конечного автомата . . . . .	51
2.3 Модель системы «хищник – жертва» . . . . .	58
<b>3 Модели экологических систем</b> . . . . .	63
3.1 Модель простейшей водной экосистемы . . . . .	63
3.2 Модель экосистемы водохранилища Солина . . . . .	72
3.3 Модель экосистемы Сулеевского водохранилища . . . . .	84
3.4 Базы знаний по водным экосистемам . . . . .	88
3.5 База знаний по материалам гидробиологических съездов . . . . .	94
3.6 Модели экосистем озер, основанные на многолетних данных . . . . .	101
<b>4 Эколого-экономические модели</b> . . . . .	107
4.1 Модель управления водными ресурсами водохранилища . . . . .	107
4.2 Модель управления водными ресурсами реки Варты . . . . .	112
4.3 Модель развития гмины Чемерники . . . . .	120
<b>Заключение</b> . . . . .	126
<b>Литература</b> . . . . .	128



**Владимир Васильевич Меншуткин**

**Применение математического аппарата  
конечных автоматов и нечеткой логики  
в эколого-экономических моделях**

Подписано в печать 25.10.2017. Формат 60×90/16  
Бумага офсетная. Печать офсетная  
Усл.-печ. л. 8,31  
Тираж 140 экз. Заказ № 1176

Издательство «Нестор-История»  
197110 Санкт-Петербург, ул. Петрозаводская, д. 7  
Тел. (812)235-15-86  
e-mail: nestor\_historia@list.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в типографии издательства «Нестор-История»  
Тел. (812)235-15-86

По вопросам приобретения книг  
издательства «Нестор-История»  
звоните по тел.: +7 965 048-04-28